De richtingscoëfficiënt of rico

Bron: https://hoezithet.nu/lessen/wiskunde/1g_fx/rico/

Het voorschrift van een eerstegraadsfunctie ziet er als volgt uit:

$$f(x) = mx + q$$

We leerden in de vorige les al dat de waarde van m de richting bepaalt van de grafiek van f:

- Als $m > 0$, dan is de grafiek van f **stijgend**;
- Als $m < 0$, dan is de grafiek van f **dalend**;
- Als $m = 0$, is f geen eerstegraadsfunctie maar een constante functie en is de grafiek van f **vlak**;
- Hoe groter de absolute waarde van m, hoe steiler de grafiek van f.

We noemen m de **richtingscoëfficiënt** of **rico** van f: *richting-* omdat het de richting bepaalt van de grafiek van f en *-coëfficiënt* omdat het een getal is dat vermenigvuldigd wordt met x (en dus een coëfficiënt is van x).

In deze les leren we hoe je de rico kan vinden in de volgende situaties:

- wanneer er twee punten zijn gegeven die op de grafiek van f liggen;
- wanneer de grafiek van f is gegeven.

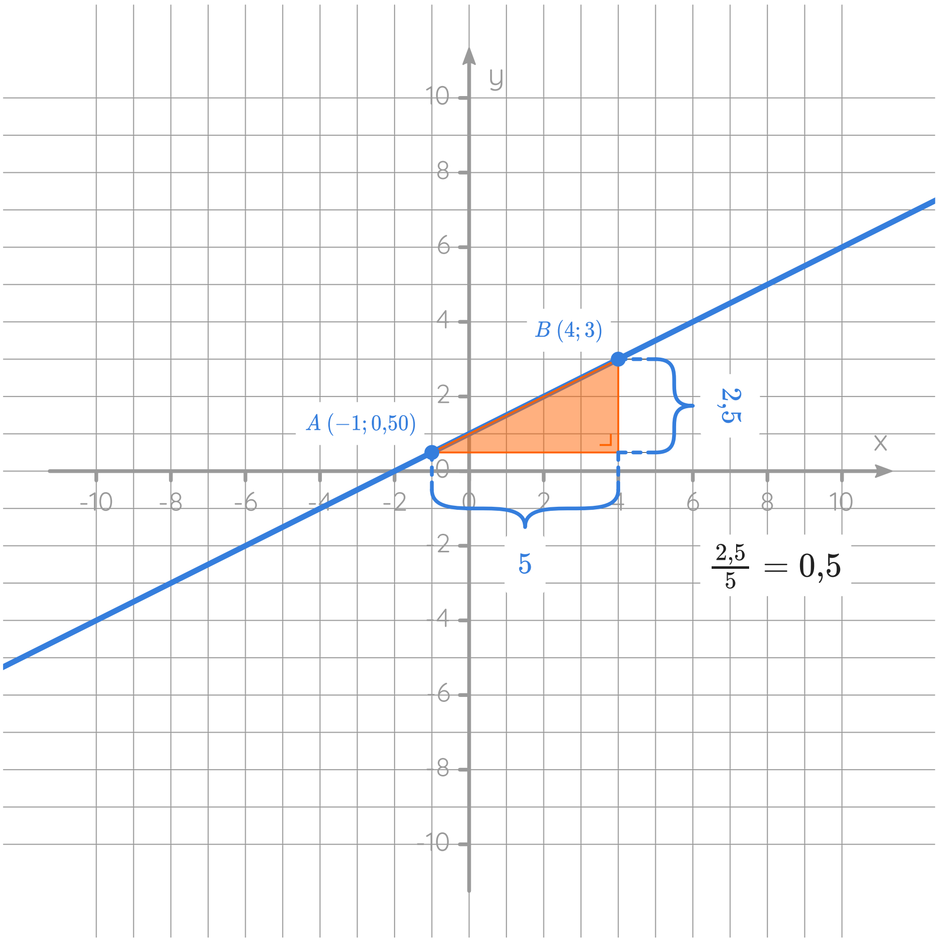
De rico van een rechte door twee punten berekenen

Hieronder staat de grafiek van de functie

$$f(x) = 0{,}5x + 1$$

We hebben twee willekeurige punten A en B aangeduid die op de grafiek van f liggen. De twee punten vormen de schuine zijde van een rechthoekige driehoek, waarvan de rechthoekszijden evenwijdig zijn met de x- en y-as. We duiden de lengte aan van elke rechthoekszijde van deze loodrechte driehoek.

Met behulp van de sliders kan je zelf de x-waarde van A en B veranderen en zie je de rechthoekige driehoek en de lengten van de rechthoekszijden mee veranderen.



$x_1 = -1$

$x_2 = 4$

We delen de **lengte van de verticale rechthoekszijde** door de **lengte van de horizontale rechthoekszijde**. Je ziet dat **deze deling altijd gelijk is aan de richtingscoëffiënt van** f! Het maakt niet uit welke twee punten je kiest op de grafiek, de verhouding van de lengten van de rechthoekszijden zal altijd gelijk zijn aan $0{,}5$: de rico.

We kunnen de rico van een functie dus vinden door het quotiënt te berekenen van de lengten van die rechthoekszijden:

$$m = \frac{\text{lengte vert. rechthoekszijde}}{\text{lengte horiz. rechthoekszijde}}$$

Als A en B de coördinaten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) hebben, dan zal

- de verticale rechthoekszijde een lengte hebben die gelijk is aan $y_2 - y_1$;
- de horizontale rechthoekszijde een lengte hebben die gelijk is aan $x_2 - x_1$.

We kunnen de lengtes in onze formule voor m dus uitdrukken met de coördinaten van de twee punten:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Met deze formule kunnen we de rico van f berekenen als we de coördinaten kennen van twee punten die op de grafiek van f liggen.

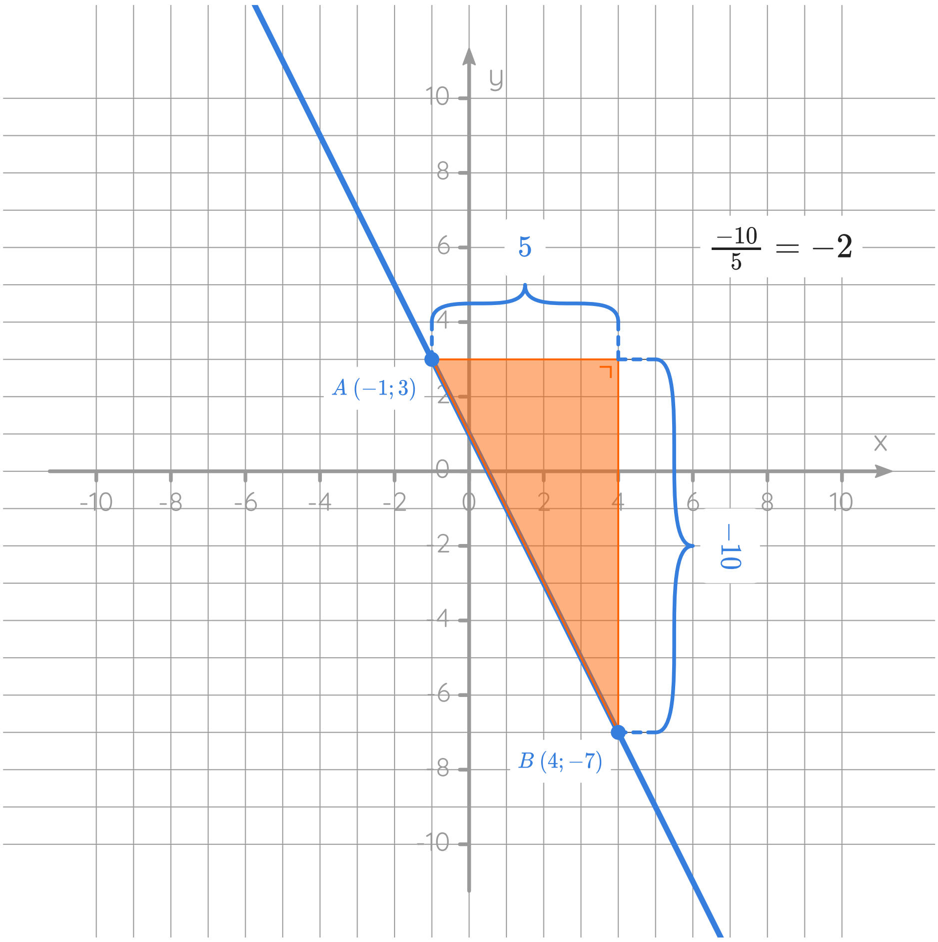
💡 De rico van een rechte door twee punten berekenen

Gegeven de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2), dan is

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

de richtingscoëfficiënt van de eerstegraadsfunctie die door beide punten loopt.

Merk op dat wanneer de functie daalt, $y_2 - y_1 < 0$ zodat ook $m < 0$:



$x_1 = -1$

$x_2 = 4$

Oefening 1a

Wat is **het functievoorschrift** van de eerstegraadsfunctie die door de punten $(-8;9)$ en $(8;2)$ gaat?

(Noteer je antwoord zelf op papier.)

Oefening 1b

Wat is **het functievoorschrift** van de eerstegraadsfunctie die door de punten $(6; 0)$ en $(3; 4)$ gaat?

(Noteer je antwoord zelf op papier.)

Oefening 1c

Wat is **het functievoorschrift** van de eerstegraadsfunctie die door de punten $(-3; 5)$ en $(3; 7)$ gaat?

(Noteer je antwoord zelf op papier.)

Oefening 1d

Wat is **het functievoorschrift** van de eerstegraadsfunctie die door de punten $(3; -9)$ en $(-1; -2)$ gaat?

(Noteer je antwoord zelf op papier.)

Oefening 1e

Wat is **het functievoorschrift** van de eerstegraadsfunctie die door de punten $(2; 1)$ en $(-4; 9)$ gaat?

(Noteer je antwoord zelf op papier.)

De rico snel aflezen op een grafiek

In de vorige paragraaf leerden we dat de rico van de eerstegraadsfunctie die door de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2) gaat, gelijk is aan

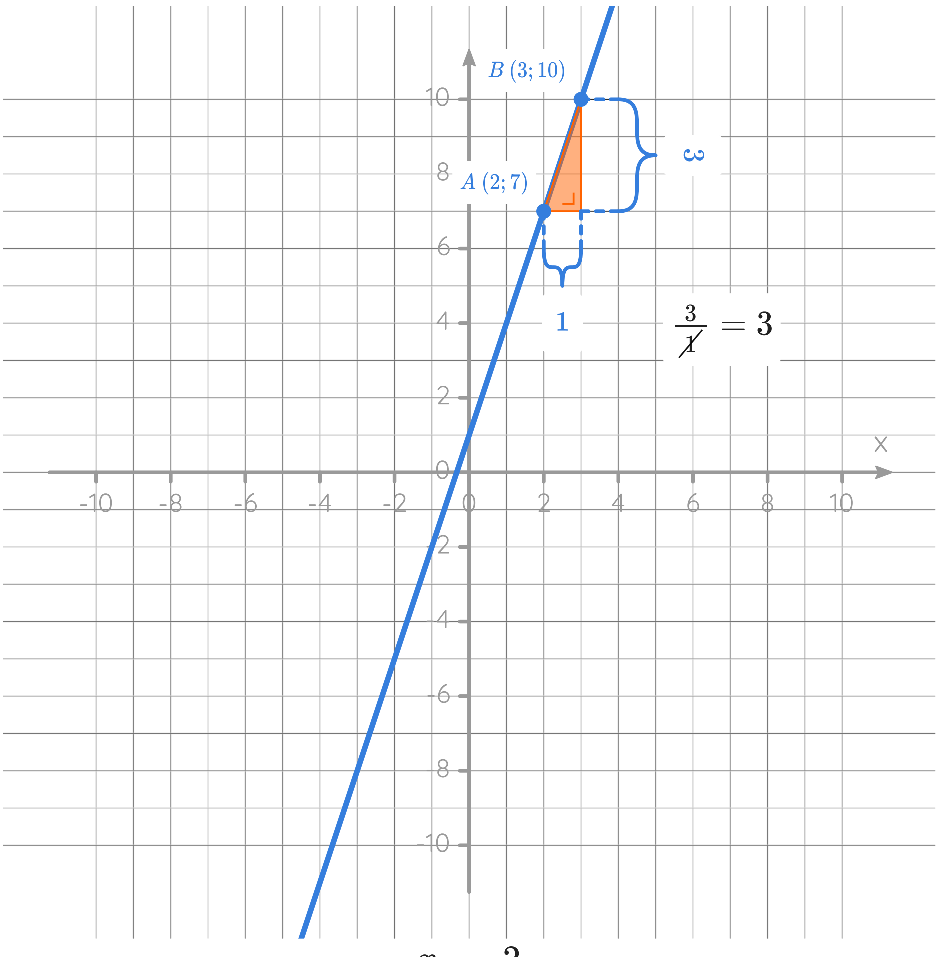
$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Stel dat de punten $A(2, 5)$ en $B(3, 8)$ op de grafiek van f liggen. We gaan even enkel de noemer van de breuk invullen:

$$\begin{aligned} m &= \frac{y_2 - y_1}{3 - 2} \\ &= \frac{y_2 - y_1}{\cancel{1}} \\ &= y_2 - y_1 \end{aligned}$$

Je ziet dat de noemer van de breuk gelijk is aan 1 en mag geschrapt worden. Alleen de teller van de breuk blijft over. De rico is voor deze twee punten gewoon gelijk aan $y_2 - y_1$!

De x-coördinaat van A is 2 en die van B is 3. De punten liggen dus één x-eenheid van elkaar. Daardoor is de noemer van onze breuk ook 1 en kunnen we de noemer schrappen. Je ziet ook op de grafiek dat wanneer twee punten één x-eenheid van elkaar liggen, de rico altijd gelijk is aan $y_2 - y_1$:



$x_1 = 2$

$m = 3$

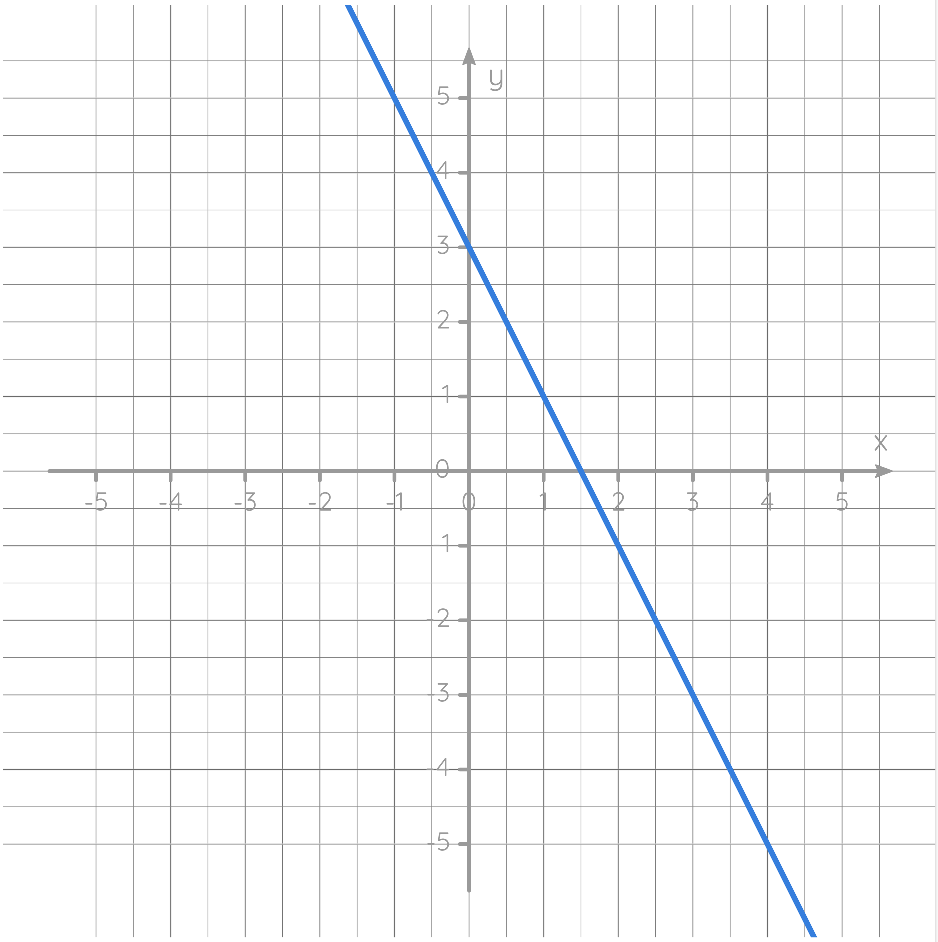
We kunnen de rico dus ook aflezen op een grafiek door twee punten te kiezen die één x-eenheid van elkaar liggen. Het verschil van hun y-coördinaten $(y_2 - y_1)$ is dan gelijk aan de rico.

💡 De rico aflezen op een grafiek

1. Kies een punt dat je duidelijk kan aflezen;
2. Ga 1 x-eenheid naar rechts;
3. Kijk hoeveel y-eenheden de functie daar gestegen of gedaald is; dit is m.

Oefening 2a

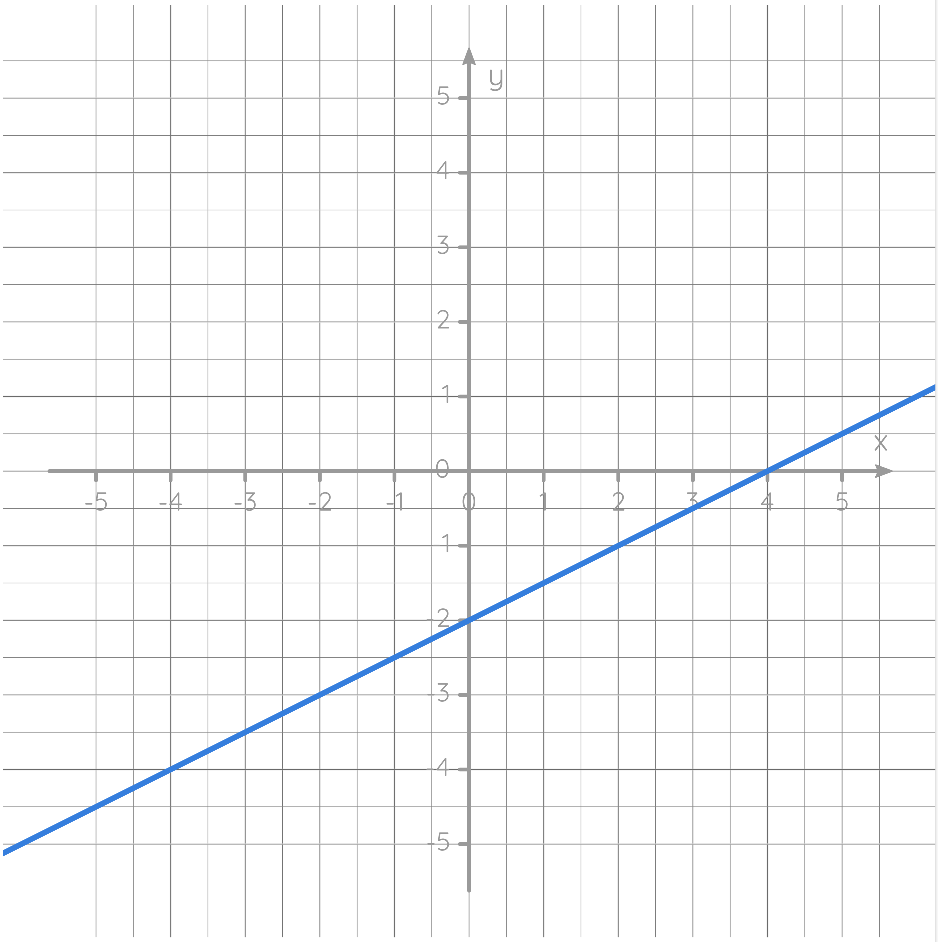
Wat is de richtingscoëfficiënt van de eerstegraadsfunctie die hieronder geplot is?



- $m = -0{,}5$
- $m = 2$
- $m = -2$

Oefening 2b

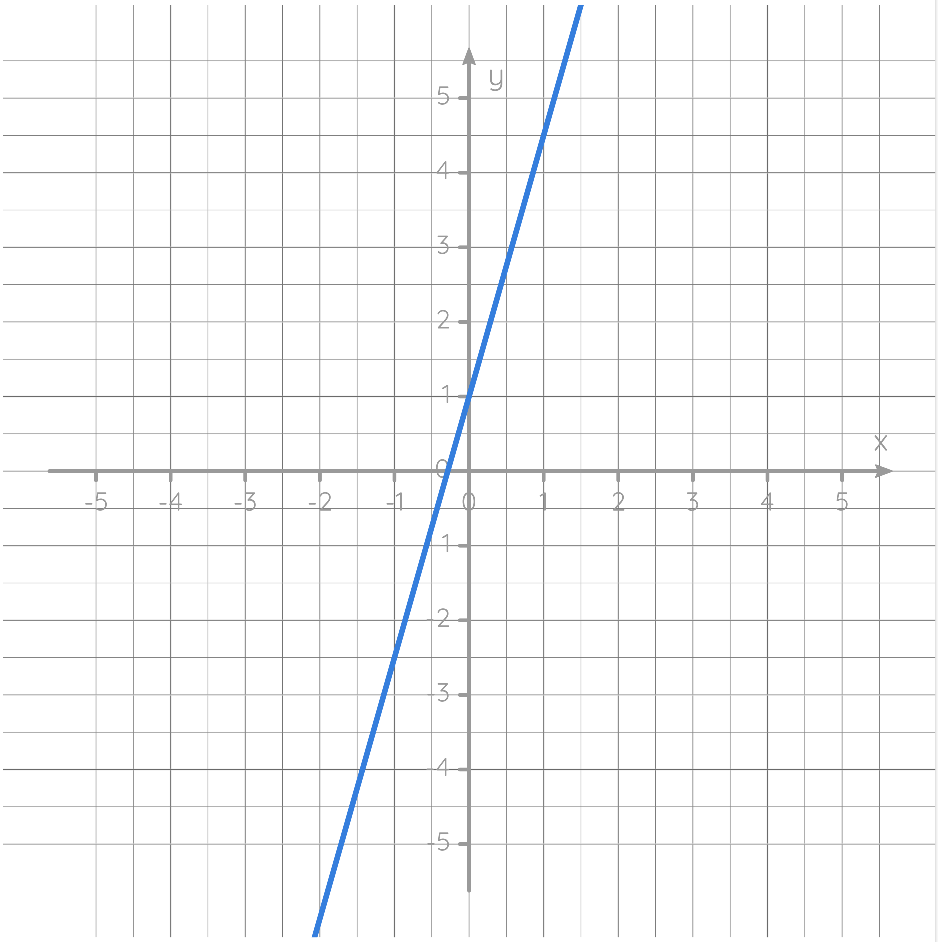
Wat is de richtingscoëfficiënt van de eerstegraadsfunctie die hieronder geplot is?



- ○ $m = 0{,}5$
- ○ $m = -0{,}5$
- ○ $m = 2$

Oefening 2c

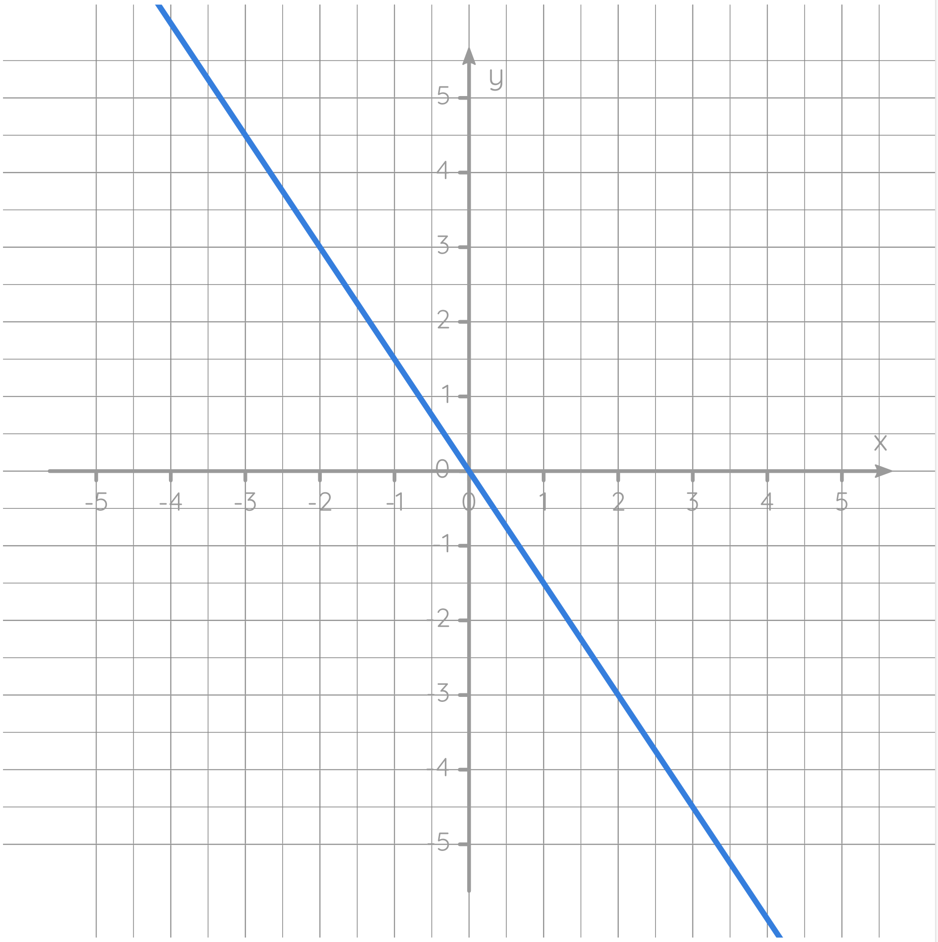
Wat is de richtingscoëfficiënt van de eerstegraadsfunctie die hieronder geplot is?



- $m = 3{,}5$
- $m = -3{,}5$
- $m = 0{,}285714$

Oefening 2d

Wat is de richtingscoëfficiënt van de eerstegraadsfunctie die hieronder geplot is?



- $m = 1{,}5$
- $m = -0{,}666667$
- $m = -1{,}5$

Samengevat

💡 De rico van een rechte door twee punten berekenen

Gegeven de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2), dan is

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

de richtingscoëfficiënt van de eerstegraadsfunctie die door beide punten loopt.

💡 De rico aflezen op een grafiek

1. Kies een punt dat je duidelijk kan aflezen;
2. Ga 1 x-eenheid naar rechts;
3. Kijk hoeveel y-eenheden de functie daar gestegen of gedaald is; dit is m.

Appendices

A1. De rico van een rechte door twee punten berekenen ↩

Gegeven de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2), dan is

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

de richtingscoëfficiënt van de eerstegraadsfunctie die door beide punten loopt.

A2. De rico aflezen op een grafiek ↩

1. Kies een punt dat je duidelijk kan aflezen;
2. Ga 1 x-eenheid naar rechts;
3. Kijk hoeveel y-eenheden de functie daar gestegen of gedaald is; dit is m.

A3. De rico van een rechte door twee punten berekenen ↩

Gegeven de punten (x_1, y_1) en (x_2, y_2), dan is

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

de richtingscoëfficiënt van de eerstegraadsfunctie die door beide punten loopt.

A4. De rico aflezen op een grafiek ↩

1. Kies een punt dat je duidelijk kan aflezen;
2. Ga 1 x-eenheid naar rechts;
3. Kijk hoeveel y-eenheden de functie daar gestegen of gedaald is; dit is m.

Oplossingen

Oefening 1a

Oplossing: $f(x) = \frac{-17}{13} \cdot x + \frac{15}{13}$

Uitleg:

Het voorschrift van een eerstegraadsfunctie heeft altijd de vorm $f(x) = mx + q$. Hierbij is m de rico. Als we twee punten $(x_1\,; y_1)$ en $(x_2\,; y_2)$ kennen die op de functie liggen, dan kunnen we de rico berekenen met de volgende formule:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

In de opgave staat dat de functie door de punten $(7; -8)$ en $(-6; 9)$ gaat. Invullen in de formule voor de rico geeft:

$$\begin{aligned} m &= \frac{9 - (-8)}{-6 - 7} \\ &= \frac{17}{-13} \\ &= \frac{-17}{13} \end{aligned}$$

We kunnen de m in $f(x) = mx + q$ nu vervangen door de gevonden rico:

$$f(x) = \frac{-17}{13} \cdot x + q$$

Om q te vinden, vullen we een van de gegeven punten in in het voorschrift. Het maakt niet uit welk punt, beide punten zullen tot dezelfde q leiden. We kiezen bijvoorbeeld voor het punt $(7; -8)$.

Als $(7; -8)$ op de grafiek van f ligt, dan betekent dit dat $f(7) = -8$. We vervangen x in het voorschrift door 7. De uitkomst hiervan moet gelijk zijn aan -8:

$$f(7) = \frac{-17}{13} \cdot 7 + q = -8$$

Hieruit volgt de vergelijking $\frac{-17}{13} \cdot 7 + q = -8$ die we kunnen oplossen naar q.

$$\begin{aligned}\frac{-17}{13}\cdot 7 + q &= -8 \\ &\Updownarrow \\ \frac{-119}{13} + q &= -8 \\ &\Updownarrow \\ q &= -8 + \frac{119}{13} \\ &\Updownarrow \\ q &= \frac{15}{13}\end{aligned}$$

We zien dat $q = \frac{15}{13}$. We vonden ook al dat $m = \frac{-17}{13}$. Het voorschrift van f is dus:

$$f(x) = \frac{-17}{13}\cdot x + \frac{15}{13}$$

Oefening 1b

Oplossing: $f(x) = \frac{9}{5}\cdot x - \frac{8}{5}$

Uitleg:
Het voorschrift van een eerstegraadsfunctie heeft altijd de vorm $f(x) = mx + q$. Hierbij is m de rico. Als we twee punten $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ kennen die op de functie liggen, dan kunnen we de rico berekenen met de volgende formule:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

In de opgave staat dat de functie door de punten $(-3; -7)$ en $(2; 2)$ gaat. Invullen in de formule voor de rico geeft:

$$\begin{aligned}m &= \frac{2-(-7)}{2-(-3)} \\ &= \frac{9}{5}\end{aligned}$$

We kunnen de m in $f(x) = mx + q$ nu vervangen door de gevonden rico:

$$f(x) = \frac{9}{5}\cdot x + q$$

Om q te vinden, vullen we een van de gegeven punten in in het voorschrift. Het maakt niet uit welk punt, beide punten zullen tot dezelfde q leiden. We kiezen bijvoorbeeld voor het punt $(-3; -7)$.

Als $(-3; -7)$ op de grafiek van f ligt, dan betekent dit dat $f(-3) = -7$. We vervangen x in het voorschrift door -3. De uitkomst hiervan moet gelijk zijn aan -7:

$$f(-3) = \frac{9}{5} \cdot (-3) + q = -7$$

Hieruit volgt de vergelijking $\frac{9}{5} \cdot (-3) + q = -7$ die we kunnen oplossen naar q.

$$\begin{aligned} \frac{9}{5} \cdot (-3) + q = -7 \\ \Updownarrow \\ \frac{-27}{5} + q = -7 \\ \Updownarrow \\ q = -7 + \frac{27}{5} \\ \Updownarrow \\ q = \frac{-8}{5} \end{aligned}$$

We zien dat $q = \frac{-8}{5}$. We vonden ook al dat $m = \frac{9}{5}$. Het voorschrift van f is dus:

$$f(x) = \frac{9}{5} \cdot x - \frac{8}{5}$$

Oefening 1c

Oplossing: $f(x) = 3 \cdot x - 7$

Uitleg:
Het voorschrift van een eerstegraadsfunctie heeft altijd de vorm $f(x) = mx + q$. Hierbij is m de rico. Als we twee punten $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$

kennen die op de functie liggen, dan kunnen we de rico berekenen met de volgende formule:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

In de opgave staat dat de functie door de punten $(-1; -10)$ en $(0; -7)$ gaat. Invullen in de formule voor de rico geeft:

$$\begin{aligned} m &= \frac{-7 - (-10)}{0 - (-1)} \\ &= \frac{3}{1} \\ &= 3 \end{aligned}$$

We kunnen de m in $f(x) = mx + q$ nu vervangen door de gevonden rico:

$$f(x) = 3 \cdot x + q$$

Om q te vinden, vullen we een van de gegeven punten in in het voorschrift. Het maakt niet uit welk punt, beide punten zullen tot dezelfde q leiden. We kiezen bijvoorbeeld voor het punt $(-1; -10)$.

Als $(-1; -10)$ op de grafiek van f ligt, dan betekent dit dat $f(-1) = -10$. We vervangen x in het voorschrift door -1. De uitkomst hiervan moet gelijk zijn aan -10:

$$f(-1) = 3 \cdot (-1) + q = -10$$

Hieruit volgt de vergelijking $3 \cdot (-1) + q = -10$ die we kunnen oplossen naar q.

$$\begin{aligned} 3 \cdot (-1) + q &= -10 \\ &\Updownarrow \\ -3 + q &= -10 \\ &\Updownarrow \\ q &= -10 + 3 \\ &\Updownarrow \\ q &= -7 \end{aligned}$$

We zien dat $q = -7$. We vonden ook al dat $m = 3$. Het voorschrift van f is dus:

$$f(x) = 3 \cdot x - 7$$

Oefening 1d

Oplossing: $f(x) = 2 \cdot x - 11$

Uitleg:
Het voorschrift van een eerstegraadsfunctie heeft altijd de vorm $f(x) = mx + q$. Hierbij is m de rico. Als we twee punten $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ kennen die op de functie liggen, dan kunnen we de rico berekenen met de volgende formule:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

In de opgave staat dat de functie door de punten $(1; -9)$ en $(8; 5)$ gaat. Invullen in de formule voor de rico geeft:

$$\begin{aligned} m &= \frac{5 - (-9)}{8 - 1} \\ &= \frac{14}{7} \\ &= 2 \end{aligned}$$

We kunnen de m in $f(x) = mx + q$ nu vervangen door de gevonden rico:

$$f(x) = 2 \cdot x + q$$

Om q te vinden, vullen we een van de gegeven punten in in het voorschrift. Het maakt niet uit welk punt, beide punten zullen tot dezelfde q leiden. We kiezen bijvoorbeeld voor het punt $(1; -9)$.

Als $(1; -9)$ op de grafiek van f ligt, dan betekent dit dat $f(1) = -9$. We vervangen x in het voorschrift door 1. De uitkomst hiervan moet gelijk zijn aan -9:

$$f(1) = 2 \cdot 1 + q = -9$$

Hieruit volgt de vergelijking $2 \cdot 1 + q = -9$ die we kunnen oplossen naar q.

$$\begin{aligned} 2 \cdot 1 + q &= -9 \\ &\Updownarrow \\ 2 + q &= -9 \\ &\Updownarrow \\ q &= -9 - 2 \\ &\Updownarrow \\ q &= -11 \end{aligned}$$

We zien dat $q = -11$. We vonden ook al dat $m = 2$. Het voorschrift van f is dus:

$$f(x) = 2 \cdot x - 11$$

Oefening 1e

Oplossing: $f(x) = \frac{11}{4} \cdot x + 20$

Uitleg:
Het voorschrift van een eerstegraadsfunctie heeft altijd de vorm $f(x) = mx + q$. Hierbij is m de rico. Als we twee punten $(x_1; y_1)$ en $(x_2; y_2)$ kennen die op de functie liggen, dan kunnen we de rico berekenen met de volgende formule:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

In de opgave staat dat de functie door de punten $(-4; 9)$ en $(-8; -2)$ gaat. Invullen in de formule voor de rico geeft:

$$\begin{aligned} m &= \frac{-2 - 9}{-8 - (-4)} \\ &= \frac{-11}{-4} \\ &= \frac{11}{4} \end{aligned}$$

We kunnen de m in $f(x) = mx + q$ nu vervangen door de gevonden rico:

$$f(x) = \frac{11}{4} \cdot x + q$$

Om q te vinden, vullen we een van de gegeven punten in in het voorschrift. Het maakt niet uit welk punt, beide punten zullen tot dezelfde q leiden. We kiezen bijvoorbeeld voor het punt $(-4; 9)$.

Als $(-4; 9)$ op de grafiek van f ligt, dan betekent dit dat $f(-4) = 9$. We vervangen x in het voorschrift door -4. De uitkomst hiervan moet gelijk zijn aan 9:

$$f(-4) = \frac{11}{4} \cdot (-4) + q = 9$$

Hieruit volgt de vergelijking $\frac{11}{4} \cdot (-4) + q = 9$ die we kunnen oplossen naar q.

$$\begin{aligned} \frac{11}{4} \cdot (-4) + q &= 9 \\ &\Updownarrow \\ -11 + q &= 9 \\ &\Updownarrow \\ q &= 9 + 11 \\ &\Updownarrow \\ q &= 20 \end{aligned}$$

We zien dat $q = 20$. We vonden ook al dat $m = \frac{11}{4}$. Het voorschrift van f is dus:

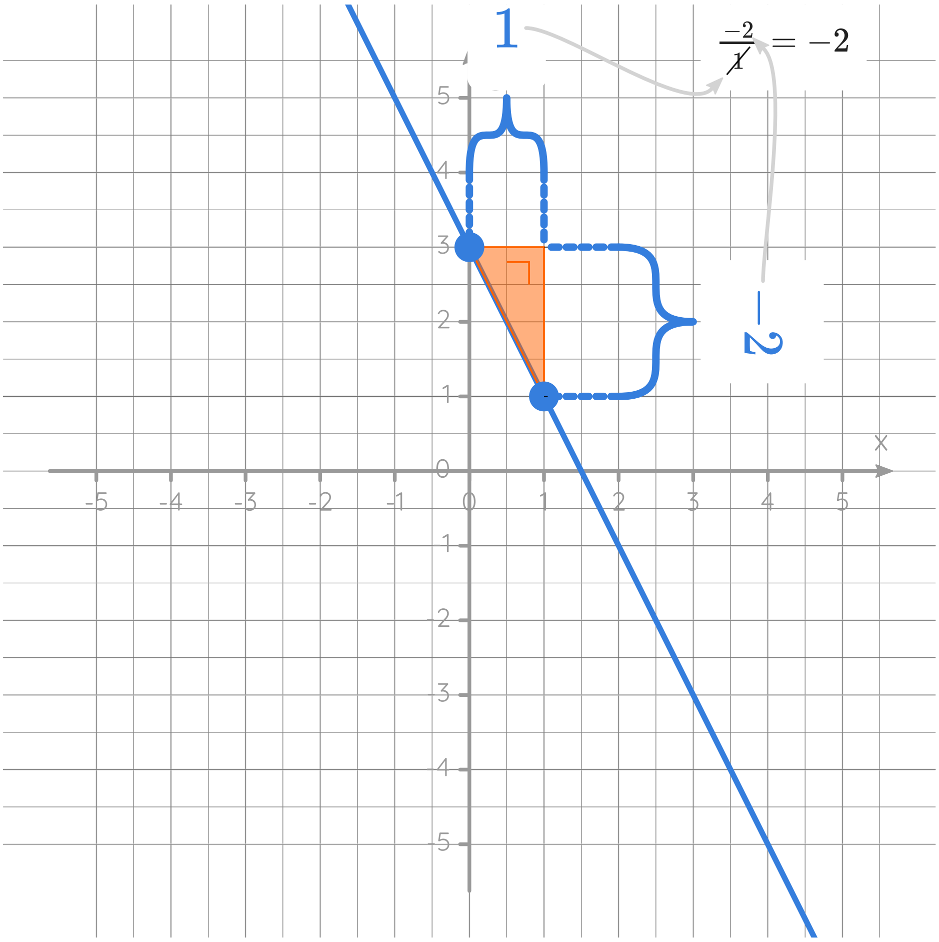
$$f(x) = \frac{11}{4} \cdot x + 20$$

Oefening 2a

Oplossing: $m = -2$

Uitleg:
We kunnen de rico aflezen op de grafiek van een eerstegraadsfunctie door te kijken hoeveel eenheden de grafiek stijgt of daalt wanneer we vanaf de grafiek één eenheid opschuiven naar rechts. We vertrekken bijvoorbeeld

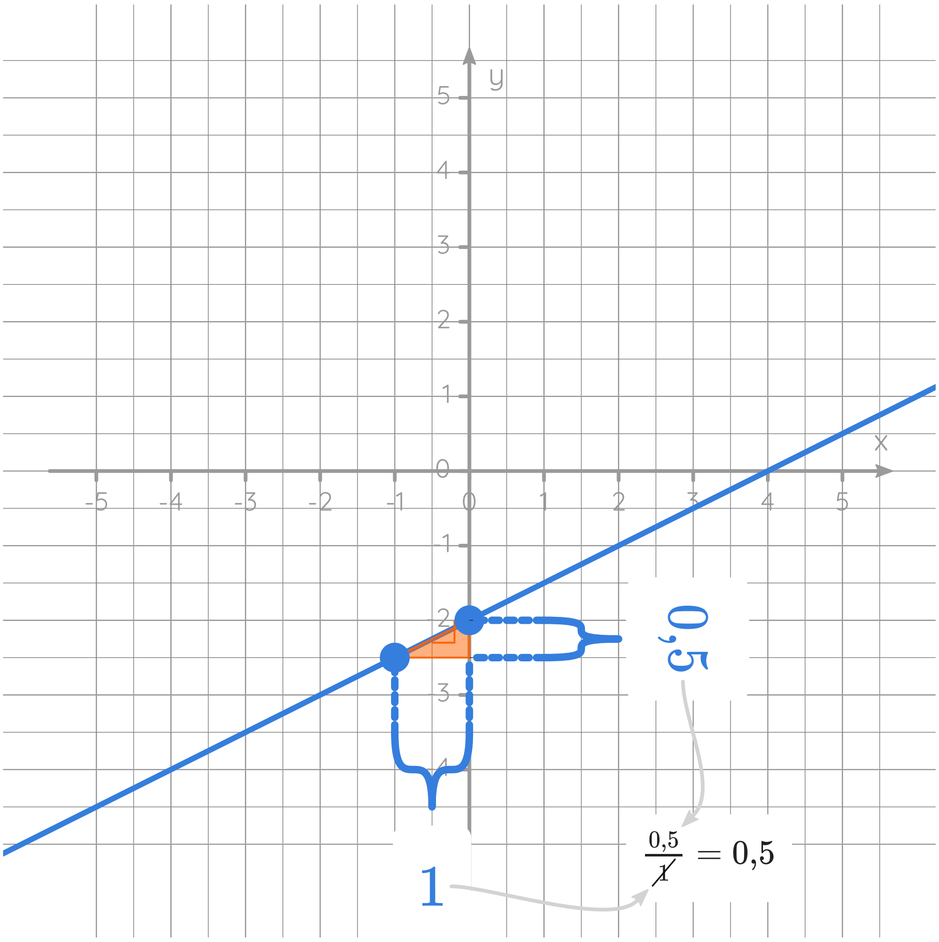
vanaf het punt $(0; 3)$. Als we één eenheid opschuiven naar rechts, zien we dat de grafiek 2 eenheden daalt. Omdat de functie daalt, moeten we hier een minteken voor zetten om de rico te krijgen. De rico is dus gelijk aan -2.



Oefening 2b

Oplossing: $m = 0{,}5$

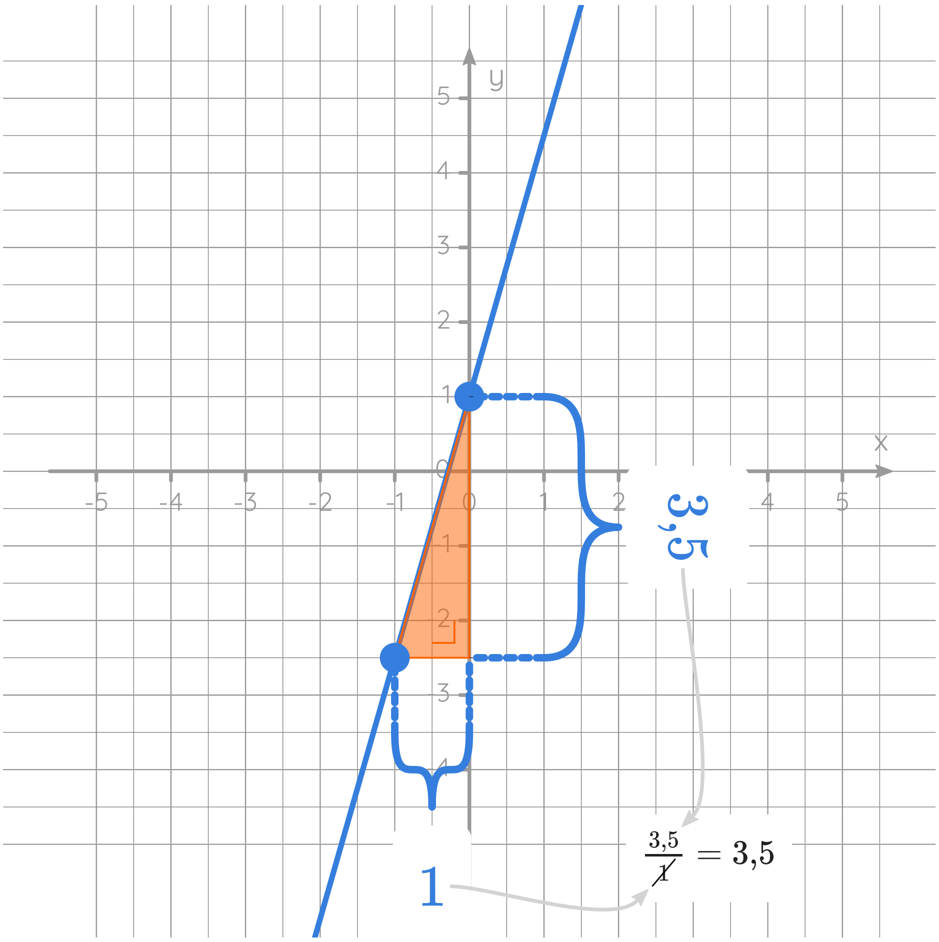
Uitleg:
We kunnen de rico aflezen op de grafiek van een eerstegraadsfunctie door te kijken hoeveel eenheden de grafiek stijgt of daalt wanneer we vanaf de grafiek één eenheid opschuiven naar rechts. We vertrekken bijvoorbeeld vanaf het punt $(-1; -2{,}5)$. Als we één eenheid opschuiven naar rechts, zien we dat de grafiek $0{,}5$ eenheden stijgt. De rico is dus gelijk aan $0{,}5$.



Oefening 2c

Oplossing: $m = 3{,}5$

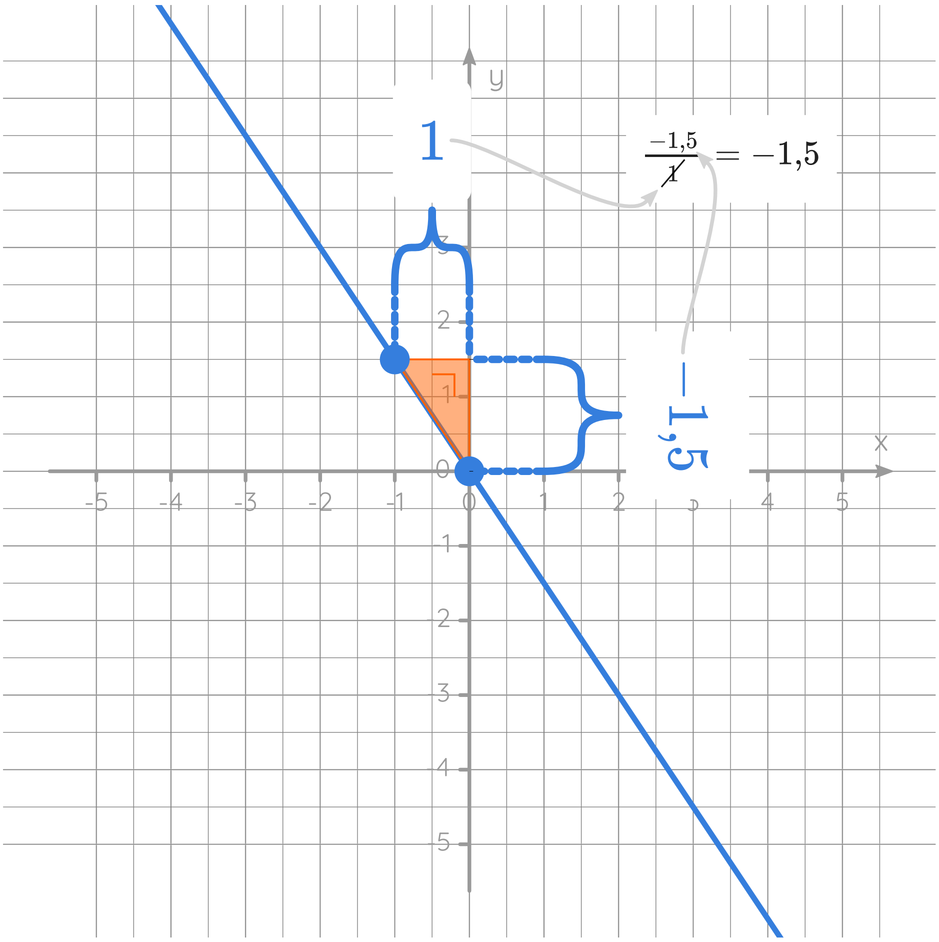
Uitleg:
We kunnen de rico aflezen op de grafiek van een eerstegraadsfunctie door te kijken hoeveel eenheden de grafiek stijgt of daalt wanneer we vanaf de grafiek één eenheid opschuiven naar rechts. We vertrekken bijvoorbeeld vanaf het punt $(-1; -2{,}5)$. Als we één eenheid opschuiven naar rechts, zien we dat de grafiek $3{,}5$ eenheden stijgt. De rico is dus gelijk aan $3{,}5$.



Oefening 2d

Oplossing: $m = -1{,}5$

Uitleg:
We kunnen de rico aflezen op de grafiek van een eerstegraadsfunctie door te kijken hoeveel eenheden de grafiek stijgt of daalt wanneer we vanaf de grafiek één eenheid opschuiven naar rechts. We vertrekken bijvoorbeeld vanaf het punt $(-1; 1{,}5)$. Als we één eenheid opschuiven naar rechts, zien we dat de grafiek $1{,}5$ eenheden daalt. Omdat de functie daalt, moeten we hier een minteken voor zetten om de rico te krijgen. De rico is dus gelijk aan $-1{,}5$.


y
x
1
$\frac{-1{,}5}{\cancel{1}} = -1{,}5$
$-1{,}5$
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
4
5