De afgeleide in een punt berekenen

Bron: https://hoezithet.nu/lessen/wiskunde/afgeleiden_1/afgeleide/

Met de afgeleide berekenen we de **ogenblikkelijke verandering** van een functie. In deze les gaan we leren hoe je zo'n afgeleide in een bepaald punt kan berekenen.

Van gemiddelde naar ogenblikkelijke verandering

We weten al dat we de *gemiddelde verandering* van een functie kunnen berekenen met het differentiequotiënt:

$$\frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Als je de formule voor het differentiequotiënt nog wat beangstigend vindt, lees je best de les over differentiequotiënt nog eens na.

Met die formule kunnen we bijvoorbeeld de *gemiddelde snelheid* van een wagen berekenen wanneer we de positie van de wagen in functie van de tijd kennen. Door een slim trucje toe te passen, kunnen we de formule echter ook gebruiken om de *ogenblikkelijke verandering* van een functie te berekenen. Dan kunnen we bijvoorbeeld ook berekenen hoe snel een wagen *op een bepaald tijdstip reed*.

Het trucje is om in de formule van het differentiequotiënt **de limiet te berekenen voor** Δx **naar** 0:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Zo krijgen we meteen de **formule om een afgeleide te berekenen in** $x = a$, afgekort schrijven we "$f'(a)$" (let op het accentje na de f):

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Door die limiet te berekenen, weten we waar de gemiddelde verandering aan gelijk is wanneer $a + \Delta x$ **heel dicht bij** a zou liggen. Maar wanneer $a + \Delta x$ héél dicht bij a ligt, zijn ze **bijna hetzelfde**. We berekenen zo waaraan de verandering op het ogenblik a zou gelijk zijn. We berekenen dus de **ogenblikkelijke verandering in** a.

De afgeleide met je blote hand schatten

Stel dat we de volgende functie hebben:

$$f(x) = -3 \cdot x^2 + 5$$

En we willen de **afgeleide berekenen in** $x = 4$, of in symbolen $f'(4)$. Dan moeten we in onze definitie van de afgeleide in $x = a$ de a vervangen door 4. We moeten dus de uitkomst van de volgende limiet vinden:

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4 + \Delta x) - f(4)}{\Delta x}$$

Geen paniek als je nog niet veel ervaring hebt met limieten. Je kan die limiet namelijk ook met je *blote handen* berekenen. Dat doe je door het differentiequotiënt verschillende keren uit te rekenen waarbij je Δx **telkens dichter bij** 0 **kiest**.

We beginnen bijvoorbeeld met $\Delta x = 0{,}1$:

$$\frac{f(4 + 0{,}1) - f(4)}{0{,}1} = \frac{f(4{,}1) - f(4)}{0{,}1}$$

Je ziet dat we eerst nog $f(4{,}1)$ en $f(4)$ moeten berekenen. Dat is snel gefikst:

$$\begin{aligned} f(4{,}1) &= -3 \cdot 4{,}1^2 + 5 \\ &= -3 \cdot 16{,}81 + 5 \\ &= -50{,}43 + 5 \\ &= -45{,}43 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(4) &= -3 \cdot 4^2 + 5 \\ &= -3 \cdot 16 + 5 \\ &= -48 + 5 \\ &= -43 \end{aligned}$$

Nu we $f(4{,}1)$ en $f(4)$ kennen, kunnen we verder met het berekenen van ons differentiequotiënt:

$$\begin{aligned} \frac{f(4{,}1) - f(4)}{0{,}1} &= \frac{-45{,}43 - (-43)}{0{,}1} \\ &= \frac{-2{,}43}{0{,}1} \\ &= -24{,}3 \end{aligned}$$

Wanneer we $\Delta x = 0{,}1$ kiezen, is ons differentiequotiënt voor de functie $f(x) = -3 \cdot x^2 + 5$ in $x = 4$ dus gelijk aan $-24{,}3$. We gaan nu op dezelfde manier het differentiequotiënt berekenen en Δx telkens dichter en dichter bij 0 kiezen. Hieronder zie je een tabel met de uitkomsten. Reken zelf ook even na of je dezelfde uitkomsten vindt:

Δx	$\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x}$
$0{,}1$	$\frac{f(4+0{,}1)-f(4)}{0{,}1} = \frac{-2{,}43}{0{,}1} = -24{,}3$
$0{,}01$	$\frac{f(4+0{,}01)-f(4)}{0{,}01} = \frac{-0{,}2403}{0{,}01} = -24{,}03$
$0{,}001$	$\frac{f(4+0{,}001)-f(4)}{0{,}001} = \frac{-0{,}024003}{0{,}001} = -24{,}003$
$0{,}0001$	$\frac{f(4+0{,}0001)-f(4)}{0{,}0001} = \frac{-0{,}00240003}{0{,}0001} = -24{,}0003$
$0{,}00001$	$\frac{f(4+0{,}00001)-f(4)}{0{,}00001} = \frac{-0{,}0002400003}{0{,}00001} = -24{,}00003$
$0{,}000001$	$\frac{f(4+0{,}000001)-f(4)}{0{,}000001} = \frac{-0{,}000024000003}{0{,}000001} = -24{,}000003$

We zouden nog een tijdje kunnen doorgaan, maar het zou je moeten opvallen dat die 3 stilaan wegdrijft naar een plek waar ze zo klein is dat ze eigenlijk verwaarloosbaar is. Hoe dichter we Δx naar 0 brengen, hoe dichter de uitkomst van het differentiequotiënt gaat naar -24. We kunnen dus zeggen dat:

$$\begin{aligned} f'(4) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x} \\ &= -24 \end{aligned}$$

Dat is eigenlijk wat we bedoelen met die limiet: **naar welk getal gaat de uitkomst van het differentiequotiënt wanneer we Δx steeds dichter en dichter naar 0 brengen?**

De afgeleide in een punt sneller leren berekenen

Het is natuurlijk lastig om voor elke afgeleide zo'n hele tabel te moeten maken. Gelukkig kunnen we iets doordachter te werk gaan. We gaan terug naar ons voorbeeld waarbij we de afgeleide in $x = 4$ wilden berekenen van de volgende functie:

$$f(x) = -3 \cdot x^2 + 5$$

Om de afgeleide in $x = 4$ te vinden, moeten we de volgende limiet uitrekenen:

$$f'(4) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(4+\Delta x) - f(4)}{\Delta x}$$

Vorige keer berekenden we deze limiet door *met onze blote handen* verschillende waarden voor Δx te kiezen die steeds dichter en dichter bij 0 kwamen. Nu gaan we het iets doordachter aanpakken. We gaan de Δx even laten voor wat het is en $f(4 + \Delta x)$ uitrekenen door letterlijk $4 + \Delta x$ in te vullen in ons functievoorschrift:

$$
\begin{aligned}
f(4+\Delta x) &= -3\cdot(4+\Delta x)^2+5 \\
&= -3\cdot(16+2\cdot 4\cdot\Delta x+(\Delta x)^2)+5 \\
&= -3\cdot(16+8\Delta x+(\Delta x)^2)+5 \\
&= -48-24\Delta x-3(\Delta x)^2+5 \\
&= -43-24\Delta x-3(\Delta x)^2
\end{aligned}
$$

⚠️ Merkwaardig product

Let op, $(4+\Delta x)^2$ is een merkwaardig product! Het is van de vorm

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

Als we nu ook nog $f(4)$ uitrekenen, kennen we de twee termen in de teller (bovenaan) van de breuk:

$$
\begin{aligned}
f(4) &= -3\cdot 4^2+5 \\
&= -3\cdot 16+5 \\
&= -48+5 \\
&= -43
\end{aligned}
$$

Nu we $f(4+\Delta x)$ en $f(4)$ kennen, kunnen we de teller van ons differentiequotiënt al voor een stuk uitrekenen. Van de limiet trekken we ons voorlopig niets aan, die schrijven we gewoon over.

$$
\begin{aligned}
f'(4) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(4+\Delta x)-f(4)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-43-24\Delta x-3(\Delta x)^2-(-43)}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-43-24\Delta x-3(\Delta x)^2+43}{\Delta x} \\
&= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-24\Delta x-3(\Delta x)^2}{\Delta x}
\end{aligned}
$$

Nu krijgen we een breuk die we kunnen **vereenvoudigen**, want zowel teller als noemer zijn **deelbaar door** Δx:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{-24\Delta x - 3(\Delta x)^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-24 - 3\Delta x}{1}$$

Zo krijgen we een heel eenvoudige limiet:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (-24 - 3\Delta x)$$

Hier zie je duidelijk waar die *wegdrijvende* 3 vandaan komt. Wanneer we Δx kleiner en kleiner kiezen (bv. $0{,}1$; $0{,}01$; $0{,}001$;...) gaan we de -3 steeds vermenigvuldigen met kleiner en kleiner getal en gaan we van de -24 steeds een kleiner en kleiner getal aftrekken ($0{,}3$; $0{,}03$; $0{,}003$;...).

De limiet uitrekenen is heel eenvoudig, want als Δx heel dicht naar 0 gaat, dan zal $-3\Delta x$ ook naar 0 gaan en blijft dus enkel -24 over:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (-24 - 3\Delta x) = -24$$

🎉 We krijgen dus dezelfde uitkomst als wanneer we de limiet met onze blote handen uitrekenden!

Samengevat

De afgeleide in $x = a$ berekenen

De afgeleide in $x = a$ van een functie $f(x)$ is gedefinieerd als:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Voor een bepaalde a kan je deze limiet kan je als volgt uitrekenen:

1. Bereken $f(a + \Delta x)$ door letterlijk "$a + \Delta x$" in te vullen in het voorschrift van $f(x)$
2. Bereken $f(a)$ door a in te vullen in het het voorschrift van $f(x)$
3. Bereken $f(a + \Delta x) - f(a)$ door je uitkomsten van de vorige stappen van elkaar af te trekken
4. Vul de uitkomst van $f(a + \Delta x) - f(a)$ in in de teller (boven) van het differentiequotiënt
5. Vereenvoudig de breuk door Δx te schrappen waar dat kan
6. Bereken de limiet door Δx te vervangen door 0

Appendices

A1. ↩

Als je de formule voor het differentiequotiënt nog wat beangstigend vindt, lees je best de les over differentiequotiënt nog eens na.

A2. Merkwaardig product ↩

Let op, $(4 + \Delta x)^2$ is een merkwaardig product! Het is van de vorm

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

A3.

De afgeleide in $x = a$ berekenen

↩

De afgeleide in $x = a$ van een functie $f(x)$ is gedefinieerd als:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Voor een bepaalde a kan je deze limiet kan je als volgt uitrekenen:

1. Bereken $f(a + \Delta x)$ door letterlijk "$a + \Delta x$" in te vullen in het voorschrift van $f(x)$
2. Bereken $f(a)$ door a in te vullen in het het voorschrift van $f(x)$
3. Bereken $f(a + \Delta x) - f(a)$ door je uitkomsten van de vorige stappen van elkaar af te trekken
4. Vul de uitkomst van $f(a + \Delta x) - f(a)$ in in de teller (boven) van het differentiequotiënt
5. Vereenvoudig de breuk door Δx te schrappen waar dat kan
6. Bereken de limiet door Δx te vervangen door 0