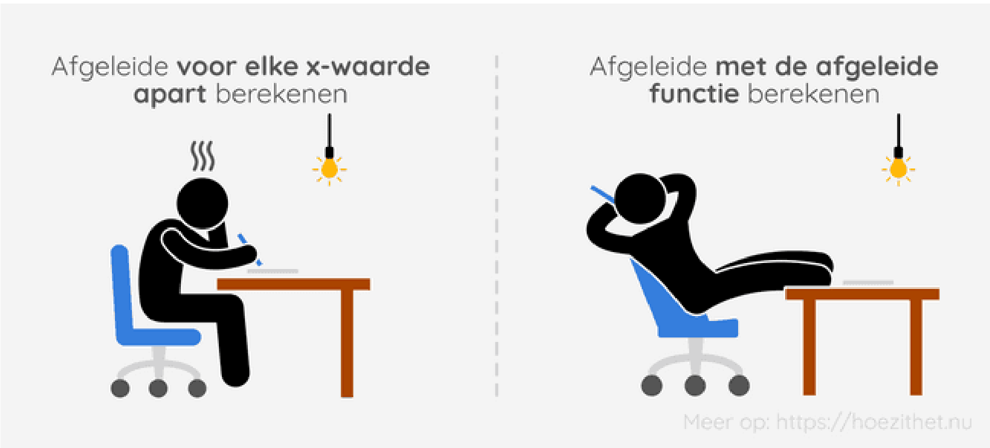
De afgeleide van een functie

Bron:
https://hoezithet.nu/lessen/wiskunde/afgeleiden_1/afgeleide_functie/

In de vorige les zagen we hoe je de afgeleide voor een bepaalde x-waarde van een functie $f(x)$ kan berekenen. Lees die les zeker eens na als je nog niet goed begrijpt wat we daar juist mee bedoelen. Je kan in die les zien dat het eigenlijk nogal **veel werk** is om zo'n afgeleide te berekenen. Zeker als we voor meerdere x-waarden die afgeleide zouden willen berekenen.

Gelukkig kunnen we ook de **afgeleide van een volledige functie** berekenen. Dat betekent dat we in één keer in **alle x-waarden** (waarin $f(x)$ afleidbaar is) de afgeleide berekenen! 😮 Dat noemen we de **afgeleide functie** van een functie of kortweg **de afgeleide van een functie**.



De afgeleide functie $f'(x)$

Met de **afgeleide functie** van een functie kunnen we heel snel de afgeleide vinden voor eender welke x-waarde waarin onze functie afleidbaar is. De afgeleide functie duiden we aan door een accent naast de f van onze functie te zetten:

Je schrijft	Je leest het als
$f'(x)$	De afgeleide (functie) van f

De afgeleide functie geeft ons een **nieuw functievoorschrift** $f'(x)$. In dat voorschrift kunnen we dan weer x-waarden invullen, net zoals we in $f(x)$ x-waarden kunnen invullen. Als we in $f'(x)$ een x-waarde invullen, berekenen we meteen de **afgeleide van f in die x-waarde**. Zo moeten we niet telkens al het werk herhalen van de vorige les.

De afgeleide van een tweedegraadsfunctie

We hebben al geleerd dat een afgeleide functie $f'(x)$ ons veel werk kan besparen. Eens we $f'(x)$ gevonden hebben, kunnen we er namelijk eender welke x-waarde (waarin $f(x)$ afleidbaar is) in invullen en vinden we meteen de afgeleide in die x-waarde. Maar **hoe vinden we die afgeleide functie**? Als voorbeeld zoeken we in deze paragraaf de afgeleide functie van de volgende tweedegraadsfunctie:

$$f(x) = -3x^2 + 4x - 1$$

We leerden in de vorige les hoe je in een bepaalde x-waarde de afgeleide kan berekenen. Daarvoor vulden we de x-waarde in in de definitie van een afgeleide. Nu doen we hetzelfde, maar in plaats van een bepaald getal in te vullen, **vullen we nu x in**.

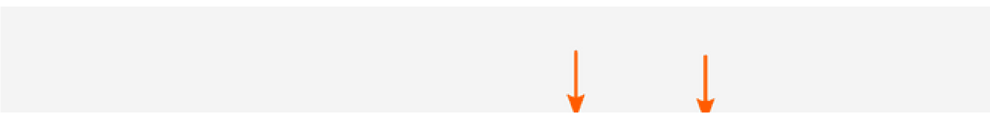
Herinner je de definitie van de afgeleide van $f(x)$ in a:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Lees zeker onze introductie tot afgeleiden eens na als je die formule niet zo goed begrijpt. Wij zijn nu op zoek naar **de afgeleide functie van een functie**, en dat is niet $f'(a)$, maar wel $f'(x)$. We moeten in onze definitie van $f'(a)$ de a dus gewoon vervangen door een x:

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

En zo hebben we de **definitie van de afgeleide functie van $f(x)$**! 🙌 Als we naar die definitie kijken, zien we dat er twee keer iets met $f(...)$ staat. De eerste keer staat er $f(x + \Delta x)$ en de tweede keer staat er $f(x)$:



$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Die $f(x+\Delta x)$ en $f(x)$ moeten we bepalen voor de functie waar we de afgeleide van willen vinden. Wij zoeken de afgeleide van $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$, dus die $f(x)$ in de definitie kunnen we al meteen vervangen:

functievoorschift zelf:
$-3x^2 + 4x - 1$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Maar hoe vinden we die vreemde $f(x+\Delta x)$? Daarvoor moeten we eigenlijk gewoon alle $x-$en in het functievoorschrift $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$ vervangen door $(x+\Delta x)$:

$(x+\Delta x)$ invullen in voorschrift:
$-3(x+\Delta x)^2 + 4(x+\Delta x) - 1$

functievoorschift zelf:
$-3x^2 + 4x - 1$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

We hebben nu $f(x+\Delta x)$ en $f(x)$ gevonden voor de functie die we willen afleiden. Nu moeten we alles uitwerken en de limiet uitrekenen. Om alles een beetje verteerbaar te houden, gaan we die harige $f(x+\Delta x)$ eerst apart uitwerken:

$$f(x+\Delta x) = -3(x+\Delta x)^2 + 4(x+\Delta x) - 1$$

Kwadraat uitwerken (merkwaardig product!)

$$= -3(x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2) + 4(x+\Delta x) - 1$$

De -3 binnen de haakjes brengen (distributiviteit)

$$= -3x^2 - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 4(x+\Delta x) - 1$$

De 4 binnen de haakjes brengen (distributiviteit)

$$= -3x^2 - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 4x + 4\Delta x - 1$$

Die $f(x+\Delta x)$ blijft een serieus harige uitdrukking... 🙄 Als je terug even naar boven gaat, zie je in de definitie van $f'(x)$ in de teller van de breuk "$f(x+\Delta x) - f(x)$" staan. We moeten van onze $f(x+\Delta x)$ dus nog $f(x)$ aftrekken. Gelukkig vallen er dan een hele hoop dingen weg:

$$f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$= -3x^2 - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 4x + 4\Delta x - 1 \; - \; (-3x^2 + 4x - 1)$$

Minteken binnen de haakjes brengen

$$= -3x^2 - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 4x + 4\Delta x - 1 + 3x^2 - 4x + 1$$

Herordenen

$$= -3x^2 + 3x^2 - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 4x - 4x + 4\Delta x - 1 + 1$$

Uitwerken

$$= 0 - 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 0 + 4\Delta x + 0$$

Nullen weglaten

$$= \boxed{- 6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 4\Delta x}$$

We hebben nu dus de teller gevonden van onze limiet:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\boxed{-6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 4\Delta x}}{\Delta x} \end{aligned}$$

Nu zou het je moeten opvallen dat er heel vaak in de breuk een Δx staat. Het is zelfs zo dat **elke term in de breuk** een factor Δx bevat. Dat betekent dat we de **breuk kunnen vereenvoudigen** door teller en noemer te delen door Δx.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-6x\Delta x - 3(\Delta x)^2 + 4\Delta x}{\Delta x}$$

Δx afzonderen

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(-6x - 3\Delta x + 4)}{\Delta x}$$

Er blijft nog één Δx over van $(\Delta x)^2$

Teller en noemer delen door Δx

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1(-6x - 3\Delta x + 4)}{1}$$

Vermenigvuldiging en deling met 1 weglaten

$$= \lim_{\Delta x \to 0} (-6x - 3\Delta x + 4)$$

Zie appendix 1: "Mogen we de teller en noemer zomaar delen door Δx?"

Dat ziet er al een heel stuk properder uit! 😀 Het enige wat ons nu nog rest is de **limiet zelf berekenen**. De limiet zegt enkel iets over Δx, dus elke term zonder Δx mogen we buiten de limiet zetten. Dan wordt de limiet heel eenvoudig en komt de afgeleide functie van $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$ tevoorschijn!

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} (-6x - 3\Delta x + 4)$$

Termen zonder Δx buiten de limiet zetten

$$= -6x + 4 + \lim_{\Delta x \to 0} (-3\Delta x)$$

Als Δx naar 0 gaat, zal $-3\Delta x$ gelijk worden aan 0

$$= -6x + 4 + 0$$

Optelling met nul weglaten

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = -6x + 4}$$

Ziezo! We hebben de afgeleide functie $f'(x)$ gevonden! 💪

Hoe helpt een afgeleide functie ons nu?

Eens we $f'(x)$ gevonden hebben, kunnen we de afgeleiden van $f(x)$ in eender welke x-waarde (waarin $f(x)$ afleidbaar is) berekenen! In de vorige les hebben we bijvoorbeeld de afgeleide van de functie $f(x) = -3x^2 + 4x - 1$ in $x = 2$ berekend. Dat vergde toen heel wat werk om te vinden dat $f'(2) = -8$. Nu kunnen we dezelfde afgeleide veel sneller berekenen omdat we nu weten dat $f'(x) = -6x + 4$:

$$f'(2) = -6 \cdot 2 + 4 = -8$$

We kunnen nu heel snel ook andere afgeleiden berekenen:

$$f'(3) = -6 \cdot 3 + 4 = -14$$

$$f'(-1) = -6 \cdot (-1) + 4 = 10$$

Sneller de afgeleide functie vinden

Eens we de afgeleide functie hebben gevonden, kunnen we snel afgeleiden vinden in verschillende x-waarden. Maar we moeten toegeven dat **het vinden van de afgeleide functie** zelf wel nog steeds **flink wat werk** was. Gelukkig bestaan er voor heel wat functies **binnenwegen om in één oogopslag de afgeleide te vinden**. Hier leren we later meer over!

Samengevat

De afgeleide functie van een functie

De afgeleide functie $f'(x)$ is de functie die voor elke x-waarde (waarin $f(x)$ afleidbaar is) de afgeleide van $f(x)$ in die x-waarde geeft.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Appendices

A1. Mogen we de teller en noemer zomaar delen door Δx ? ↩

Wanneer je deelt, moet je altijd goed opletten dat je **niet aan het delen bent door nul**. Als Δx gelijk zou zijn aan nul, zouden we de teller en noemer dus niet mogen delen door Δx om de breuk te vereenvoudigen.

We weten echter dat Δx **niet gelijk is aan nul** omdat we de **limiet naar nul** berekenen. Dat betekent dat Δx héél dicht bij nul komt, maar **nooit gelijk wordt aan nul**. We mogen de teller en noemer dus zonder probleem delen door Δx.

A2.

De afgeleide functie van een functie

↩

De afgeleide functie $f'(x)$ is de functie die voor elke x-waarde (waarin $f(x)$ afleidbaar is) de afgeleide van $f(x)$ in die x-waarde geeft.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$