Afleidbaarheid van een functie

Bron:
https://hoezithet.nu/lessen/wiskunde/afgeleiden_1/afleidbaarheid/

We hebben al geleerd hoe we de ogenblikkelijke verandering, of de afgeleide, in een punt $x = a$ kunnen berekenen:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Komt deze formule wat uit de lucht gevallen voor jou? 🤨 Lees dan zeker onze les over het berekenen van de afgeleide in een punt en onze les over het differentiequotiënt eens na.

We hebben ons echter nooit afgevraagd of die afgeleide wel altijd berekend kan worden. In deze les leren we over de **afleidbaarheid** van een functie. We gaan zien dat sommige (meestal vrij exotische) functies niet voor elke keuze van $x = a$ kunnen afgeleid worden.

Linker- en rechterlimiet, wat was dat weer?

Voor we over afleidbaarheid van een functie beginnen, moeten we eerst weten wat een linker- en rechterlimiet weer zijn. De limiet in onze formule voor het berekenen van de afgeleide van $f(x)$ in $x = a$ laat Δx naar 0 gaan:

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Er zijn echter twee manieren om Δx naar 0 te laten gaan:

- We kunnen Δx kleiner houden dan 0 en dichter en dichter naar 0 laten gaan
- Of we kunnen Δx groter houden dan 0 en dichter en dichter naar 0 laten gaan.

$\Delta x < 0 \quad \Delta x > 0$

$\Delta x < 0$	$\Delta x > 0$
$-0{,}1$	$0{,}1$
$-0{,}01$	$0{,}01$
$-0{,}001$	$0{,}001$
$-0{,}0001$	$0{,}0001$
$-0{,}00001$	$0{,}00001$
$\ldots$	$\ldots$

We zien dat in zowel de linker- als rechterkolom de getallen steeds dichter en dichter bij 0 komen.

- Wanneer we Δx **kleiner** houden dan 0, zeggen we dat we de **linkerlimiet** berekenen (omdat we van links naar 0 gaan). Dit schrijven we als

  $$\lim_{\Delta x < \to 0}$$

  Let op het *kleiner dan*-teken ($<$) onder de pijl van de limiet.
- Wanneer we Δx **groter** houden dan 0, zeggen we dat we de **rechterlimiet** berekenen (omdat we van rechts naar 0 gaan). Dit schrijven we als

  $$\lim_{\Delta x > \to 0}$$

  Let op het *groter dan*-teken ($>$) onder de pijl van de limiet.

In veel gevallen zal je voor de linker- en rechterlimiet hetzelfde vinden. Wanneer de **linker- en rechterlimiet aan elkaar gelijk** zijn, zeggen we dat de **limiet zelf bestaat**.

Linker- en rechterafgeleide

Net als de linker- en rechterlimiet, is er ook een **linker- en rechterafgeleide**:

- De **linkerafgeleide** in $x = a$ is de afgeleide die je krijgt door de **linkerlimiet** te berekenen:

$$\lim_{\Delta x < \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

- De **rechterafgeleide** in $x = a$ is de afgeleide die je krijgt door de **rechterlimiet** te berekenen:

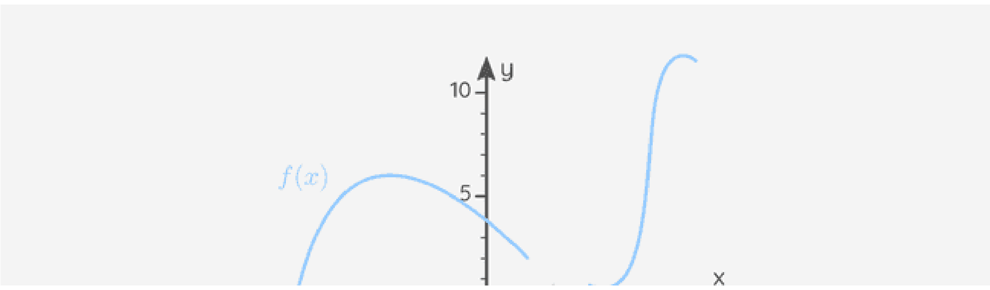
$$\lim_{\Delta x > \to 0} \frac{f(a+\Delta x)-f(a)}{\Delta x}$$

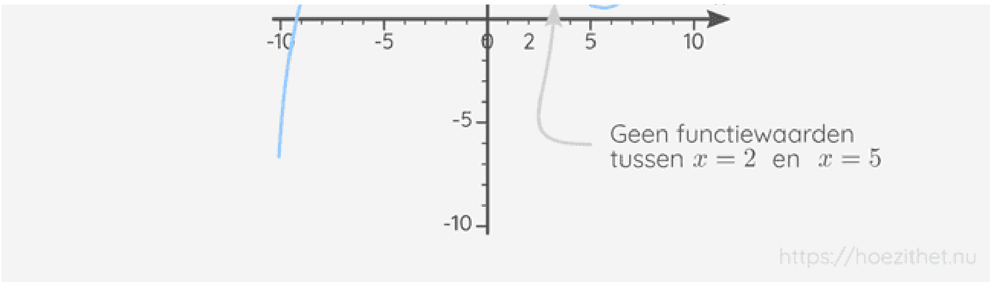
Of de linker- en/of rechterafgeleide bestaat en of ze gelijk zijn aan elkaar, bepaalt de **afleidbaarheid** van de functie in $x = a$. Er zijn drie gevallen:

- Wanneer de **linkerafgeleide** bestaat, zeggen we dat de functie **links afleidbaar** is in $x = a$.
- Wanneer de **rechterafgeleide** bestaat, zeggen we dat de functie **rechts afleidbaar** is in $x = a$.
- Wanneer de **linker- en rechterafgeleide** van $f(x)$ in $x = a$ allebei **bestaan** en **gelijk zijn aan elkaar**, zeggen we dat $f(x)$ **afleidbaar is** in $x = a$.

Linker- en rechterafgeleide in functie met gaten

Een typisch voorbeeld van een functie die niet overal afleidbaar is, is een functie waar **gaten** in zitten. Zo'n functie noemen we een **discontinue** functie. We zien in onderstaande functie dat er een gat zit tussen $x = 2$ en $x = 5$. Dat gat zorgt ervoor dat we in $x = 2$ **geen rechterlimiet** kunnen berekenen, omdat wanneer Δx *iets* groter is dan 0, dan moeten we de functiewaarde berekenen van een x-waarde die *iets* groter is dan 2. Maar alle x-waarden die *iets* groter zijn dan 2 (bv. $2{,}1$; $2{,}01$; $2{,}001$;...) liggen in die opening en hebben dus **geen functiewaarden**.





De functie is dus enkel **links afleidbaar** en **niet rechts afleidbaar** in $x = 2$. Op dezelfde manier kan je erachter komen dat diezelfde functie enkel **rechts afleidbaar** is in $x = 5$ en **niet links afleidbaar**. In $x = 6$ is de functie dan weer zowel **rechts** als **links afleidbaar** én zijn deze afgeleiden aan elkaar gelijk. In $x = 6$ is de functie dus **afleidbaar**.

Alle punten die tussen $x = 2$ en $x = 5$ liggen hebben geen functiewaarde. Daarvoor kunnen we dus noch de linker- noch de rechterafgeleide berekenen. In die punten is de functie uiteraard ook niet afleidbaar.

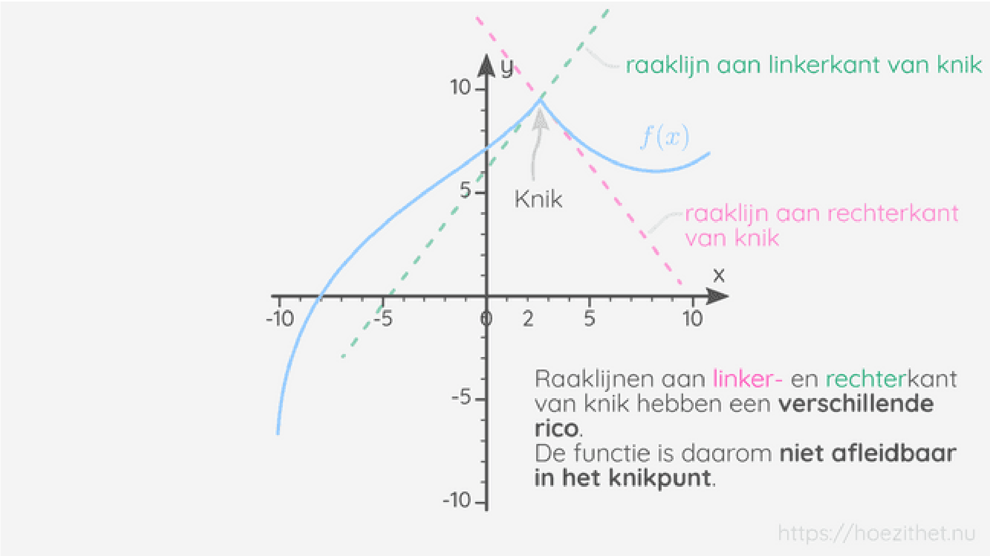
Een functie die overal afleidbaar is, is altijd continu

Als we met gaten in een functie zitten, krijgen we dus altijd aan de grenzen van die opening een punt dat niet afleidbaar is omdat ofwel de linker- ofwel de rechterafgeleide niet bestaat. In de opening zelf is er geen enkel punt afleidbaar omdat noch de linker- noch de rechterafgeleide bestaat.

Wanneer een functie **in elk punt van haar domein** afleidbaar is, is het dus **onmogelijk dat die functie discontinu is**. We kunnen dus stellen dat **een functie die overal afleidbaar is, altijd continu is** (geen gaten bevat).

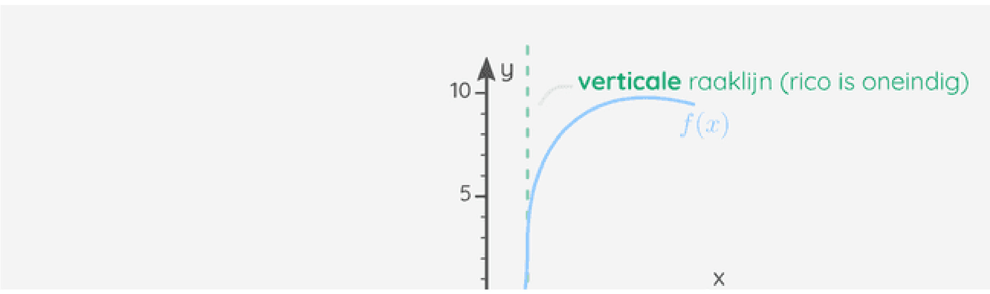
Functies met "knikken" zijn niet afleidbaar in de knik

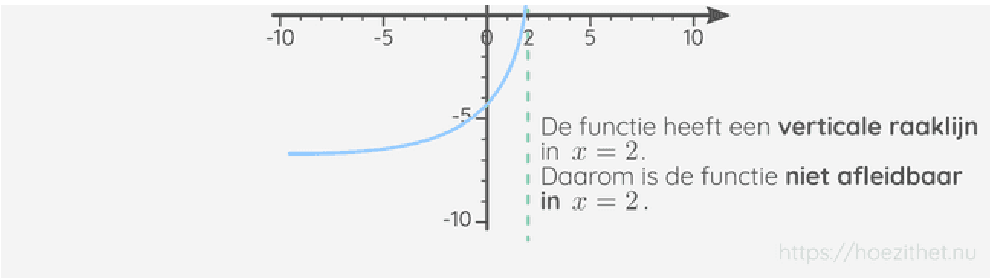
Een ander typisch voorbeeld van een functie die niet overal afleidbaar is, is een functie met een "knik". Die functies zijn niet afleidbaar in de "knik" zelf. Dit kan je eenvoudig begrijpen door een raaklijn aan de linker- en rechterkant van de knik te tekenen. Je ziet dat deze raaklijnen een verschillende richtingscoëfficiënt hebben. De **linker- en rechterafgeleide** in het knikpunt zijn dus **niet gelijk aan elkaar** en daarom is de functie in dat punt **niet afleidbaar**.



Functies met verticale raaklijnen zijn niet afleidbaar bij die raaklijn

Ten slotte zorgen verticale raaklijnen ook voor niet-afleidbare punten van een functie. Dat komt omdat een verticale raaklijn een oneindig grote rico heeft. De linker- en rechterafgeleiden zijn dus gelijk aan $+\infty$ of $-\infty$ en zijn daarom geen elementen van $\mathbb{R}$.





Merk op dat een **verticale asymptoot** ook zorgt voor een **verticale raaklijn** aan de grafiek van de functie. Een functie met een verticale asymptoot is dus niet afleidbaar op de x-waarde waar de asymptoot zich bevindt.

Samengevat

Afleidbaarheid van een functie

Een functie is afleidbaar in $x = a$ als en slechts als de linker- en rechterafgeleide in $x = a$ **bestaan én gelijk** zijn.

- De linkerafgeleide is gedefinieerd als:

$$\lim_{\Delta x < \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

- De rechterafgeleide is gedefinieerd als:

$$\lim_{\Delta x > \to 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

Typische niet-afleidbare punten bij functies

Volgende punten van een functie zijn nooit afleidbaar:

- De grenspunten van een opening in de grafiek van een functie
- De punten die in de opening van de grafiek van een functie liggen
- Knikpunten van de functie
- Punten waar de functie een verticale raaklijn heeft

Steun Hoe Zit Het! ❤️

Appendices

A1. ↩

Komt deze formule wat uit de lucht gevallen voor jou? 🤨 Lees dan zeker onze les over het berekenen van de afgeleide in een punt en onze les over het differentiequotiënt eens na.

A2.

Afleidbaarheid van een functie

↩

Een functie is afleidbaar in $x = a$ als en slechts als de linker- en rechterafgeleide in $x = a$ **bestaan én gelijk** zijn.

- De linkerafgeleide is gedefinieerd als:

$$\lim_{\Delta x < \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

- De rechterafgeleide is gedefinieerd als:

$$\lim_{\Delta x > \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}$$

A3.

Typische niet-afleidbare punten bij functies

↩

Volgende punten van een functie zijn nooit afleidbaar:

- De grenspunten van een opening in de grafiek van een functie
- De punten die in de opening van de grafiek van een functie liggen
- Knikpunten van de functie
- Punten waar de functie een verticale raaklijn heeft