Bewerkingen met veeltermen

Bron: https://hoezithet.nu/lessen/wiskunde/veeltermen/bewerkingen/

Net zoals je op getallen bewerkingen kan uitvoeren (optellen, aftrekken, vermenigvuldigen,...), kan je dat ook met veeltermen. In principe kan je eender welke bewerking die je met getallen kan doen, ook met veeltermen doen wanneer de variabelen van de veelterm reële of rationale getallen zijn. We gaan ons voorlopig echter tot vier basisbewerkingen beperken:

- Veeltermen optellen (en aftrekken)
- Een veelterm vermenigvuldigen met een eenterm
- Een veelterm vermenigvuldigen met een veelterm
- Een veelterm delen door een eenterm

We bespreken deze bewerkingen hieronder apart.

Zie appendix 1: "Alle variabelen in deze les zijn reëel of rationaal"

Veeltermen optellen en aftrekken

Het **optellen** van twee veeltermen doe je zo:

1. Laat de **haakjes weg**.
2. Je krijgt nu één lange veelterm. **Vereenvoudig en herleid** die veelterm.

Twee veeltermen die bij elkaar moeten opgeteld worden, dat ziet er bijvoorbeeld zo uit:

$$(2a^2b - 4ab^3) + (2ab^3 - 3a^2b)$$

We gaan ervan uit dat de variabelen (a en b) reële getallen zijn (of rationale getallen, maakt niet uit). We mogen dus de rekenregels voor reële getallen toepassen. Die zeggen dat de **optelling in $\mathbb{R}$ associatief is**. Dat betekent dat het niet uitmaakt of we al dan niet haakjes zetten in een optelling en dat het niet uitmaakt waar we dan wel die haakjes zouden zetten. We kunnen alle **haakjes dus gewoon weglaten**:

$$(2a^2b - 4ab^3) + (2ab^3 - 3a^2b) = 2a^2b - 4ab^3 + 2ab^3 - 3a^2b$$

Nu krijgen we een veelterm die we eenvoudig kunnen **herleiden** door de gelijksoortige eentermen bij elkaar op te tellen:

$$\begin{aligned} 2a^2b - 4ab^3 + 2ab^3 - 3a^2b &= (2-3)\cdot a^2b + (-4+2)\cdot ab^3 \\ &= -a^2b - 2\cdot ab^3 \end{aligned}$$

Als je niet meer goed weet wat het juist betekent om een veelterm te *"herleiden"*, lees dan zeker onze les over het vereenvoudigen en herleiden van een veelterm eens na.

Het **aftrekken** van twee veeltermen gaat zo:

1. Laat de **haakjes weg** en **verander de toestandstekens** ($+$ en $-$) van de termen van de veelterm die **na het minteken** stond.
2. Je krijgt nu één lange veelterm. **Vereenvoudig en herleid** die veelterm.

Bij het **aftrekken van veeltermen** gaan we ook de haakjes weglaten, maar dan moeten we **opletten dat we het minteken correct binnen de haakjes brengen**. Stel dat we de volgende berekening voorgeschoteld krijgen:

$$(-2x^3 + 3y - 5x^2y + 6) - (2x^2y + 3 - 5y - 6x^3)$$

Bij het weglaten van de haakjes, vermenigvuldigen we eigenlijk elke term in de tweede veelterm met het minteken. Net zoals $-(-3) = +3$. Dat betekent dat **alle tekens van die veelterm moeten veranderen**:

$$(-2x^3 - 5x^2y + 6) - (2x^2y + 3 - 6x^3) = -2x^3 - 5x^2y + 6 - 2x^2y - 3 + 6x^3$$

Vervolgens is het weer een kwestie van de veelterm te **herleiden**, net als bij het optellen van veeltermen:

$$\begin{aligned} -2x^3 - 5x^2y + 6 - 2x^2y - 3 + 6x^3 &= (-2+6) \cdot x^3 + (-5-2) \cdot x^2y + (6-3) \\ &= 4 \cdot x^3 - 7 \cdot x^2y + 3 \end{aligned}$$

Een veelterm vermenigvuldigen met een eenterm

Het vermenigvuldigen van een eenterm met een veelterm gaat als volgt:

1. **Vermenigvuldig de coëfficiënt** van elke term in de veelterm met de coëfficiënt van de eenterm
2. **Vermenigvuldig het lettergedeelte** van elke term in de veelterm met elke factor in het lettergedeelte van de eenterm

> Ben je even vergeten wat nu weer de *"coëfficiënt"* en het *"lettergedeelte"* was van een eenterm? Lees dan zeker onze les over eentermen even na.

Stel bijvoorbeeld dat we de volgende berekening moeten maken:

$$-2xy^2 \cdot (3x^2 + 4y^3 - 6)$$

We zien dat de eenterm $-2xy^2$ wordt vermenigvuldigd met een veelterm. Eerst gaan we de -2 van de eenterm vermenigvuldigen met alle **coëfficiënten** van de veelterm (3, 4 en -6). We passen dus eigenlijk gewoon de **distributieve eigenschap** toe:

$$-2xy^2 \cdot (3x^2 + 4y^3 - 6) = xy^2 \cdot (-6x^2 - 8y^3 + 12)$$

Nu staan er enkel nog variabelen buiten de haakjes. We zullen eerste de x naar binnen brengen door weer gebruik te maken van de distributieve eigenschap:

$$xy^2 \cdot (-6x^2 - 8y^3 + 12) = y^2 \cdot (-6x^3 - 8xy^3 + 12x)$$

> Merk op dat de $-6x^2$ na de vermenigvuldiging met x veranderd is naar $-6x^3$. We passen de rekenregel toe van het **vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal**. Zowel x als x^2 hebben namelijk een grondtal x. Daarom moeten we bij de vermenigvuldigingen de **exponenten bij elkaar optellen**: $x \cdot x^2 = x^{1+2} = x^3$.

Goed! Nu staat er nog enkel y^2 buiten de haakjes. We kunnen ook hier weer de distributieve eigenschap gebruiken om die binnen de haakjes te krijgen:

$$y^2 \cdot (-6x^3 - 8xy^3 + 12x) = (-6x^3y^2 - 8xy^5 + 12xy^2)$$

> Merk weer op dat we de rekenregel van het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal hebben toegepast: $y^2 \cdot y^3 = y^{2+3} = y^5$.

De haakjes rond onze uitkomst mogen we natuurlijk gewoon weglaten. We krijgen de volgende veelterm:

$$-6x^3y^2 - 8xy^5 + 12xy^2$$

Een veelterm delen door een eenterm

Bij het **delen van een veelterm door een eenterm**, gaan we gelijkaardig te werk als bij het *vermenigvuldigen* van een veelterm met een eenterm:

1. **Deel de coëfficiënt** van elke term in de veelterm door de coëfficiënt van de eenterm
2. **Deel het lettergedeelte** van elke term in de veelterm door elke factor in het lettergedeelte van de eenterm

Stel bijvoorbeeld dat we de volgende deling moeten maken:

$$(21u^2v^3 - 14u^2v^2 + 28uv^3) : (-7uv^2)$$

Dan beginnen we eerst met het delen van **alle coëfficiënten** van de veelterm door de -7:

$$(21u^2v^3 - 14u^2v^2 + 28uv^3) : (-7uv^2) = (-3u^2v^3 + 2u^2v^2 - 4uv^3) : (uv^2)$$

Vervolgens gaan we de factoren van de eentermen één per één weghalen. We beginnen met de u:

$$(-2u^2v^3 + 2u^2v^2 - 4uv^3) : (uv^2) = (-3uv^3 + 2uv^2 - 4v^3) : v^2$$

Zie [appendix 6: "Welke rekenregel passen we hier toe?"]

Nu we de u uit de deler hebben gehaald, blijven we enkel nog over met een deling door v^2. We gebruiken dezelfde rekenregels om ook die deling uit te voeren:

$$(-3uv^3 + 2uv^2 - 4v^3) : v^2 = (-3uv + 2u - 4v)$$

Merk op dat ook hier iets wegvalt door de deling: $2uv^2 : v^2 = 2u$.

De haakjes rond onze uitkomst kunnen gewoon weggelaten worden. De uitkomst van onze deling is dus:

$$-3uv + 2u - 4v$$

Veeltermen met elkaar vermenigvuldigen

Om twee veeltermen met elkaar te vermenigvuldigen, moeten we eigenlijk meerdere keren een veelterm vermenigvuldigen met een eenterm. Het stappenplan gaat als volgt:

1. **Vermenigvuldig elke term van de ene veelterm met elke term van de andere veelterm**.
2. Je krijgt één lange veelterm. **Vereenvoudig en herleid** die veelterm.

Zoals je in de eerste stap ziet, moeten we élke term van de ene met élke term van de andere veelterm vermenigvuldigen. Het vermenigvuldigen van veeltermen kan daarom al snel een warboel worden. Het is belangrijk dat je er stap per stap doorgaat. Stel dat we de volgende vermenigvuldiging moeten oplossen:

$$(-4a^2b + 3ab^2 + ab) \cdot (a - 2ab)$$

Nu komt het erop aan om op een *gestructureerde manier* alle termen van de ene veelterm met elke term van de andere veelterm te vermenigvuldigen. We beginnen met de *eerste term van de eerste veelterm* te vermenigvuldigen met de tweede veelterm. Dit doen we op precies dezelfde manier als hoe we een eenterm vermenigvuldigen met een veelterm Zo kunnen we al het eerste stuk van onze uitkomst beginnen schrijven:

$$(-4a^2b + 3ab^2 + ab) \cdot (a - 2ab) = -4a^3b + 8a^3b^2 + \dots$$

Vervolgens vermenigvuldigen we de *tweede term van de eerste veelterm* met de tweede veelterm. Zo krijgen we het tweede stuk van de uitkomst:

$$(-4a^2b + 3ab^2 + ab) \cdot (a - 2ab) = -4a^3b + 8a^3b^2 + 3a^2b^2 - 6a^2b^3 + \ldots$$

Tenslotte vermenigvuldigen we de *derde term van de eerste veelterm* met de tweede veelterm.

$$(-4a^2b + 3ab^2 + ab) \cdot (a - 2ab) = -4a^3b + 8a^3b^2 + 3a^2b^2 - 6a^2b^3 + a^2b - 2a^2b^2$$

De volledige uitkomst van onze vermenigvuldiging is dus:

$$-4a^3b + 8a^3b^2 + 3a^2b^2 - 6a^2b^3 + a^2b - 2a^2b^2$$

Als laatste stap moeten we eens kijken of we deze lange veelterm nog kunnen vereenvoudigen of herleiden.

> Als je niet meer goed weet wat het juist betekent om een veelterm te *"herleiden"*, lees dan zeker onze les over het vereenvoudigen en herleiden van een veelterm eens na.

We zoeken naar termen met **hetzelfde lettergedeelten** en tellen de coëfficiënten van deze termen bij elkaar op:

$$\begin{aligned}-4a^3b + 8a^3b^2 + 3a^2b^2 - 6a^2b^3 + a^2b - 2a^2b^2 &= -4a^3b + 8a^3b^2 + (3-2)a^2b^2 - 6a^2b^3 + \\ &= -4a^3b + 8a^3b^2 + a^2b^2 - 6a^2b^3 + a^2b\end{aligned}$$

Tenslotte **rangschikken** we de veelterm volgens dalende graad van de eentermen:

$$8a^3b^2 - 6a^2b^3 - 4a^3b + a^2b^2 + a^2b$$

Veeltermen en eentermen met letterexponenten vermenigvuldigen

Het kan soms voorkomen dat een eenterm of een veelterm **letterexponenten** bevat. Stel bijvoorbeeld dat we de volgende vermenigvuldiging hebben van een eenterm en een veelterm:

$$x^{(m+1)}y^n \cdot (-3x + x^2y^n)$$

Dan moeten we goed de **rekenregel voor het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal** in ons achterhoofd houden. Die zegt dat we bij zo een vermenigvuldiging de **exponenten moeten optellen**. We zullen eens tonen hoe dat gaat wanneer we die $x^{(m+1)}$ binnen de haakjes brengen:

$$\begin{aligned}x^{(m+1)}y^n \cdot (-3x + x^2y^n) &= y^n \cdot (-3x \cdot x^{(m+1)} + x^2 \cdot x^{(m+1)}y^n) \\ &= y^n \cdot (-3x^{1+(m+1)} + x^{2+(m+1)}y^n) \\ &= y^n \cdot (-3x^{1+m+1} + x^{2+m+1}y^n) \\ &= y^n \cdot (-3x^{(m+2)} + x^{(m+3)}y^n)\end{aligned}$$

Je ziet dat we ook hier weer niets meer doen dan de exponenten bij elkaar op te tellen. We brengen nu op dezelfde manier de y^n naar binnen:

$$\begin{aligned}y^n \cdot (-3x^{(m+2)} + x^{(m+3)}y^n) &= (-3x^{(m+2)} \cdot y^n + x^{(m+3)}y^n \cdot y^n) \\ &= (-3x^{(m+2)}y^n + x^{(m+3)}y^{n+n}) \\ &= (-3x^{(m+2)}y^n + x^{(m+3)}y^{2n})\end{aligned}$$

De haakjes rond onze uitkomst kunnen we gerust weglaten. We krijgen dus het volgende resultaat:

$$-3x^{(m+2)}y^n + x^{(m+3)}y^{2n}$$

Voor het vermenigvuldigen van twee veeltermen die letterexponenten bevatten, werken we uiteraard op een gelijkaardige manier. Het verschil is dat je moet het in dat geval enkele keren vaker moet doen om elke term van de ene veelterm te vermenigvuldigen met elke term van de andere veelterm.

Samengevat

Het optellen van veeltermen

Het **optellen** van twee veeltermen doe je zo:

1. Laat de **haakjes weg**.
2. Je krijgt nu één lange veelterm. **Vereenvoudig en herleid** die veelterm.

Het aftrekken van veeltermen

Het **aftrekken** van twee veeltermen gaat zo:

1. Laat de **haakjes weg** en **verander de toestandstekens** (+ en -) van de termen van de veelterm die **na het minteken** stond.
2. Je krijgt nu één lange veelterm. **Vereenvoudig en herleid** die veelterm.

Een veelterm vermenigvuldigen met een eenterm

Het **vermenigvuldigen** van een **veelterm met een eenterm** gaat als volgt:

1. **Vermenigvuldig de coëfficiënt** van elke term in de veelterm met de coëfficiënt van de eenterm
2. **Vermenigvuldig het lettergedeelte** van elke term in de veelterm met elke factor in het lettergedeelte van de eenterm

Een veelterm delen door een eenterm

Het **delen van een veelterm door een eenterm** doen we als volgt:

1. **Deel de coëfficiënt** van elke term in de veelterm door de coëfficiënt van de eenterm
2. **Deel het lettergedeelte** van elke term in de veelterm door elke factor in het lettergedeelte van de eenterm

Een veelterm vermenigvuldigen met een andere veelterm

Twee veeltermen met elkaar te vermenigvuldigen, doen we zo:

1. **Vermenigvuldig elke term van de ene veelterm met elke term van de andere veelterm**.
2. Je krijgt één lange veelterm. **Vereenvoudig en herleid** die veelterm.

Appendices

A1. Alle variabelen in deze les zijn reëel of rationaal ↩

We gaan ervan uit dat alle variabelen in deze les een element zijn van de reële getallen. Als je nog niet weet wat reële getallen zijn, mag je ook aannemen dat de variabelen een element zijn van de rationale, gehele of zelfs natuurlijk getallen. Voor al die verzamelingen gelden dezelfde rekenregels wat betreft bewerkingen met veeltermen.

A2. ↩

Als je niet meer goed weet wat het juist betekent om een veelterm te *"herleiden"*, lees dan zeker onze les over het vereenvoudigen en herleiden van een veelterm eens na.

A3. ↩

Ben je even vergeten wat nu weer de *"coëfficiënt"* en het *"lettergedeelte"* was van een eenterm? Lees dan zeker onze les over eentermen even na.

A4. ↩

Merk op dat de $-6x^2$ na de vermenigvuldiging met x veranderd is naar $-6x^3$. We passen de rekenregel toe van het **vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal**. Zowel x als x^2 hebben namelijk een grondtal x. Daarom moeten we bij de vermenigvuldigingen de **exponenten bij elkaar optellen**: $x \cdot x^2 = x^{1+2} = x^3$.

A5. ↩

Merk weer op dat we de rekenregel van het vermenigvuldigen van machten met hetzelfde grondtal hebben toegepast: $y^2 \cdot y^3 = y^{2+3} = y^5$.

A6. Welke rekenregel passen we hier toe? ↩

Merk op dat we de rekenregel van het **delen van machten met hetzelfde grondtal** toepassen. Wanneer we delen door u moeten we daarom in elke term van de veelterm 1 aftrekken van de exponent van u. Bij $-2u^2v^3$, bijvoorbeeld, krijgen we na een deling door u $-2uv^3$ omdat

$$\begin{aligned} -2u^2v^3 : u &= -2u^{2-1}v^3 \\ &= -2uv^3 \end{aligned}$$

Bij de deling van $-4uv^3$ door u **valt de u in de term weg** omdat

$$\begin{aligned} -4uv^3 : u &= -4u^{1-1}v^3 \\ &= -4u^0v^3 \\ &= -4 \cdot 1 \cdot v^3 \\ &= -4v^3 \end{aligned}$$

A7. ↩

Merk op dat ook hier iets wegvalt door de deling: $2uv^2 : v^2 = 2u$.

A8. ↩

Als je niet meer goed weet wat het juist betekent om een veelterm te *"herleiden"*, lees dan zeker onze les over het vereenvoudigen en herleiden van een veelterm eens na.

A9.

Het optellen van veeltermen

↩

Het **optellen** van twee veeltermen doe je zo:

1. Laat de **haakjes weg**.
2. Je krijgt nu één lange veelterm. **Vereenvoudig en herleid** die veelterm.

A10.

Het aftrekken van veeltermen

↩

Het **aftrekken** van twee veeltermen gaat zo:

1. Laat de **haakjes weg** en **verander de toestandstekens** (+ en -) van de termen van de veelterm die **na het minteken** stond.
2. Je krijgt nu één lange veelterm. **Vereenvoudig en herleid** die veelterm.

A11.

Een veelterm vermenigvuldigen met een eenterm

↩

Het **vermenigvuldigen** van een **veelterm met een eenterm** gaat als volgt:

1. **Vermenigvuldig de coëfficiënt** van elke term in de veelterm met de coëfficiënt van de eenterm
2. **Vermenigvuldig het lettergedeelte** van elke term in de veelterm met elke factor in het lettergedeelte van de eenterm

A12.

Een veelterm delen door een eenterm

↩

Het **delen van een veelterm door een eenterm** doen we als volgt:

1. **Deel de coëfficiënt** van elke term in de veelterm door de coëfficiënt van de eenterm
2. **Deel het lettergedeelte** van elke term in de veelterm door elke factor in het lettergedeelte van de eenterm

A13.

Een veelterm vermenigvuldigen met een andere veelterm

↩

Twee veeltermen met elkaar te vermenigvuldigen, doen we zo:

1. **Vermenigvuldig elke term van de ene veelterm met elke term van de andere veelterm**.
2. Je krijgt één lange veelterm. **Vereenvoudig en herleid** die veelterm.